

Corrigé de l'examen blanc du semestre 1 (barème)

Programme du semestre 1 (chapitres 01 à 07)

2^{ème} Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — barème

Exercice 1 : 3 pts ; exercice 2 : 3,5 pts ; exercice 3 : 3 pts ; exercice 4 : 3 pts ; problème : 7,5 pts (A : 2, B : 5,5) ; bonus : $2 \times 0,5$ pt (note plafonnée à 20). La répartition des points à l'intérieur de chaque question est indiquée entre crochets.

Exercice 1 (3 points)

1) [1 pt] Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$ [0,5]. Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ [0,25] et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = -2$ [0,25].

2) [1 pt] $v_n = -2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$ [0,25], donc $u_n = v_n + 3 = 3 - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$ [0,25]. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$ [0,5].

3) [1 pt] $S_n = \sum_{k=0}^n (3 + v_k) = 3(n+1) + (v_0 + \dots + v_n)$ [0,25]. Somme des termes d'une suite géométrique :

$$v_0 + \dots + v_n = -2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = -3 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = -3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ [0,5].}$$

Donc $S_n = 3n + 3 - 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ [0,25].

Bonus [+0,5 pt]. $|u_n - 3| = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n < 10^{-3} \iff 3^n > 2000 \iff n \ln 3 > \ln 2000 \iff n > \frac{\ln 2000}{\ln 3} \approx 6,92$ (la fonction $\ln$ est strictement croissante et $\ln 3 > 0$, donc chaque étape est réversible). Le plus petit entier est $n = 7$ (vérification : $3^6 = 729 < 2000 < 2187 = 3^7$).

Exercice 2 (3,5 points)

1) [1 pt] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété « $u_n > 1$ » [0,25].

— *Initialisation* : $u_0 = 2 > 1$, donc $P(0)$ est vraie [0,25].

— *Hérédité* : on suppose que $P(n)$ est vraie pour un entier naturel n donné, c'est-à-dire $u_n > 1$. Alors $u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n + 2 - u_n - 4}{u_n + 4} = \frac{2(u_n - 1)}{u_n + 4}$. Comme $u_n - 1 > 0$ et $u_n + 4 > 0$, on obtient $u_{n+1} - 1 > 0$: $P(n+1)$ est vraie [0,25].

— *Conclusion* : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ [0,25].

2) a) [0,5 pt] $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n(u_n + 4)}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4} = \frac{-(u_n - 1)(u_n + 2)}{u_n + 4}$.

b) [0,5 pt] Puisque $u_n > 1$: $u_n - 1 > 0$, $u_n + 2 > 0$ et $u_n + 4 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est décroissante [0,25]. Elle est décroissante et minorée par 1, donc elle est convergente [0,25].

3) [0,75 pt] $u_{n+1} + 2 = \frac{3u_n + 2 + 2u_n + 8}{u_n + 4} = \frac{5(u_n + 2)}{u_n + 4}$ [0,25]. Donc

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{2(u_n - 1)}{5(u_n + 2)} = \frac{2}{5}v_n \text{ [0,25].}$$

(v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et de premier terme $v_0 = \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}$ [0,25].

4) [0,75 pt] $v_n = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ [0,25]. De $v_n(u_n + 2) = u_n - 1$, on tire $u_n(1 - v_n) = 1 + 2v_n$; or $v_n \leq \frac{1}{4} < 1$, donc

$$u_n = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n} = \frac{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{2}{5}\right)^n} \text{ [0,25].}$$

Comme $-1 < \frac{2}{5} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ [0,25].

Exercice 3 (3 points)

1) [1 pt] $\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 16 = -4 = (2i)^2$ [0,5]. Les solutions sont $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$ [0,5].

2) [0,5 pt] $|a| = \sqrt{3+1} = 2$ et $a = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$.

3) [0,5 pt] D'après la formule de Moivre, $a^6 = 2^6 (\cos \pi + i \sin \pi) = -64$, qui est réel.

4) [1 pt] $\frac{c}{a} = \frac{2i(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{2+2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ [0,5]. Donc $|\frac{c}{a}| = 1$, soit $OC = OA$, et $(\widehat{OA}, \widehat{OC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ [0,25]. Le triangle OAC est isocèle en O avec un angle de $\frac{\pi}{3}$: il est **équilatéral** [0,25].

Exercice 4 (3 points)

1) [0,5 pt] $|1+i| = \sqrt{2}$ et $1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ [0,25]. Moivre : $(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 16$ [0,25].

2) [0,5 pt] $z_1 = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$.

3) [0,5 pt] $|w| = \sqrt{1+3} = 2$ et $w = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 (\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3}))$: un argument de w est $-\frac{\pi}{3}$.

4) [0,5 pt] Moivre : $w^3 = 8 (\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) = -8$.

5) [0,5 pt] On note $E(2i)$ et $F(-2)$: $|z-2i| = |z+2| \iff ME = MF$. L'ensemble cherché est la **médiatrice** du segment $[EF]$, c'est-à-dire la droite d'équation $y = -x$ (en écrivant $z = x+iy$: $x^2 + (y-2)^2 = (x+2)^2 + y^2 \iff -4y = 4x$).

6) [0,5 pt] $|z-1+i| = |z-(1-i)| = 2$: en notant $\Omega(1-i)$, $\Omega M = 2$. L'ensemble cherché est le **cercle** de centre $\Omega(1; -1)$ et de rayon 2.

Problème (7,5 points)

Partie A (2 points)

1) [0,5 pt] $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ [0,25]. Pour $x > 0$, $g(x) = x \left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ [0,25].

2) [0,5 pt] $g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$.

3) [0,5 pt] Sur $]0; +\infty[$, $g'(x)$ a le signe de $x-2$.

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
g	$+\infty$	$\searrow$	$2-2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

4) [0,5 pt] Le minimum de g est $g(2) = 2(1 - \ln 2)$, strictement positif car $\ln 2 < 1$. Donc $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Partie B (5,5 points)

1) a) [0,25 pt] $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$: la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à (C_f) .

b) [0,25 pt] Pour $x > 0$, $\ln x = 2 \ln \sqrt{x}$, donc $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\sqrt{x} \rightarrow +\infty$ et $\frac{\ln X}{X} \rightarrow 0$ ($X = \sqrt{x}$), donc $\frac{(\ln x)^2}{x} \rightarrow 0$. Ainsi $f(x) = x \left(1 - \frac{(\ln x)^2}{x} \right) \rightarrow +\infty$.

c) [0,5 pt] $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{(\ln x)^2}{x} \rightarrow 1$ et $f(x) - x = -(\ln x)^2 \rightarrow -\infty$ [0,25]. Donc (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une **branche parabolique** de direction la droite $(\Delta) : y = x$ [0,25].

d) [0,5 pt] $f(x) - x = -(\ln x)^2 \leq 0$, avec égalité si et seulement si $x = 1$: (C_f) est en dessous de (Δ) et la touche au seul point $A(1; 1)$.

2) a) [0,5 pt] $f'(x) = 1 - 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{x - 2 \ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$.

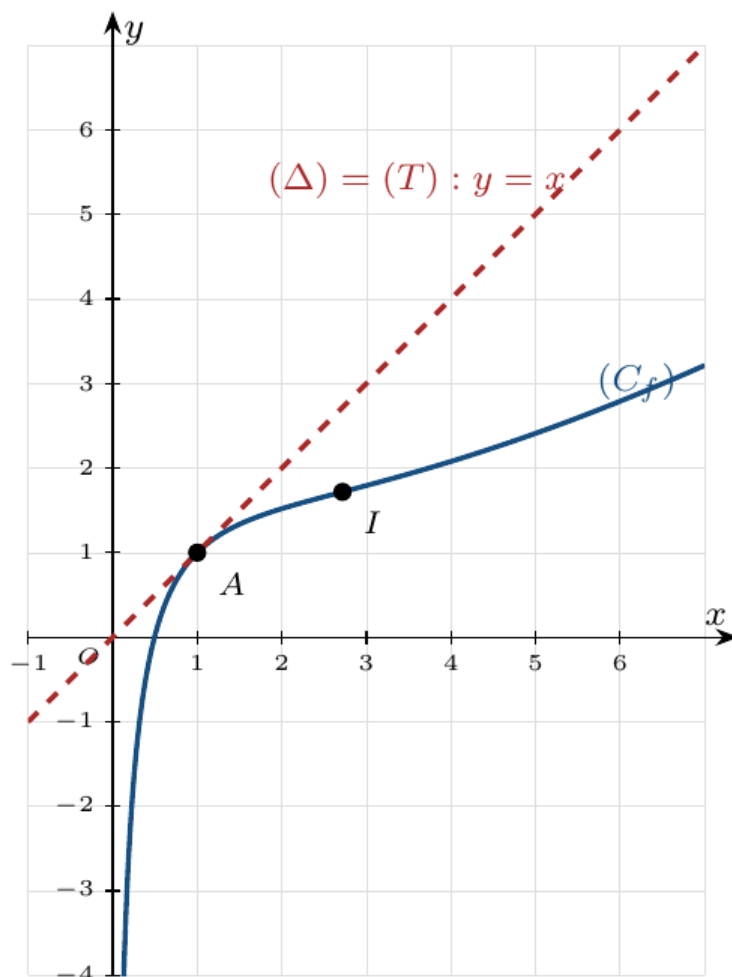
b) [0,5 pt] D'après la partie A, $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		+	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

c) [0,5 pt] $f(1) = 1$ et $f'(1) = \frac{g(1)}{1} = 1$: la tangente en A a pour équation $y = 1 \times (x - 1) + 1$, soit $y = x$; c'est (Δ) .

3) a) [0,75 pt] $f'(x) = 1 - \frac{2 \ln x}{x}$, donc $f''(x) = -2 \times \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{2(\ln x - 1)}{x^2}$ [0,25]. $f''(x)$ a le signe de $\ln x - 1$, qui s'annule et change de signe en $x = e$ [0,25] : (C_f) est concave sur $]0; e]$, convexe sur $[e; +\infty[$, et admet un unique point d'inflexion $I(e; e - 1)$ [0,25].

b) [1 pt]



4) a) [0,25 pt] f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$: c'est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $J = \left] \lim_{0^+} f; \lim_{+\infty} f \right[= \mathbb{R}$.

b) [0,5 pt] $0 \in J$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β [0,25]. De plus $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$, et f est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\frac{1}{e} < \beta < 1$ [0,25].

Bonus [+0,5 pt]. $f(\beta) = 0$ donne $(\ln \beta)^2 = \beta$. Comme $0 < \beta < 1$, $\ln \beta < 0$; donc $\ln \beta = -\sqrt{(\ln \beta)^2} = -\sqrt{\beta}$.