

Corrigé du devoir surveillé n° 3 (barème)

Fonctions logarithmes — Nombres complexes

2ème Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — barème

Exercice 1 : 6 pts ; exercice 2 : 14 pts ; bonus : 2 × 0,5 pt (note plafonnée à 20). Résultats vérifiés avec Python/sympy (verif_ds3.py).

Exercice 1 (6 points)

1. [1,5 pt] $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 = 12 - 16 = -4 = (2i)^2 < 0$. L'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$. Donc $S = \{\sqrt{3} + i; \sqrt{3} - i\}$.
2. [1,5 pt] $|a| = \sqrt{3+1} = 2$ et $a = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Comme $b = \bar{a} : b = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.
3. [1 pt] $OA = |a| = 2, OB = |b| = 2$ et $OC = |2i| = 2$: les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.
4. [2 pts] $c - a = -\sqrt{3} + i$ et $b - a = -2i$, donc

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{-\sqrt{3}+i}{-2i} = \frac{(-\sqrt{3}+i) \times i}{-2i \times i} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Son module vaut $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, donc $\frac{AC}{AB} = 1$, c'est-à-dire $AC = AB$: le triangle ABC est **isocèle en A**. (De plus $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$.)

5. Bonus [+0,5 pt] D'après la formule de Moivre, $a^6 = 2^6 \left(\cos\frac{6\pi}{6} + i\sin\frac{6\pi}{6}\right) = 64(\cos\pi + i\sin\pi) = -64$: c'est un réel.

Exercice 2 (14 points)

Partie A

1. [2 pts] $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$. Sur $]0; +\infty[$, $g'(x)$ a le signe de $2x^2 - 1 : g'(x) < 0$ sur $]0; \frac{\sqrt{2}}{2}[$ et $g'(x) > 0$ sur $]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$. Le minimum vaut $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\ln 2}{2}$.

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		$\begin{smallmatrix} \vdots \\ - \\ 0 \\ + \\ \vdots \end{smallmatrix}$	
$g(x)$	$+\infty$	$\frac{3}{2} + \frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$

2. [1 pt] g admet en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ un minimum égal à $\frac{3}{2} + \frac{\ln 2}{2} > 0$. Donc, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g(x) \geq \frac{3}{2} + \frac{\ln 2}{2} > 0$.

Partie B

3. [1 pt] Quand $x \rightarrow 0^+$: $\ln x \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, donc $\frac{\ln x}{x} \rightarrow -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à (C_f) .

4. [2,5 pts] On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. De plus $f(x) - (x-1) = \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$: la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

5. [1,5 pt] $f(x) - (x-1) = \frac{\ln x}{x}$ a le signe de $\ln x$ (car $x > 0$) :

- sur $]0; 1[$, $\ln x < 0$: (C_f) est **en dessous** de (D) ;
- sur $]1; +\infty[$, $\ln x > 0$: (C_f) est **au-dessus** de (D) ;
- (C_f) et (D) se coupent au point $A(1; 0)$.

6. [1,5 pt] Pour $x > 0$: $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, donc

$$f'(x) = 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

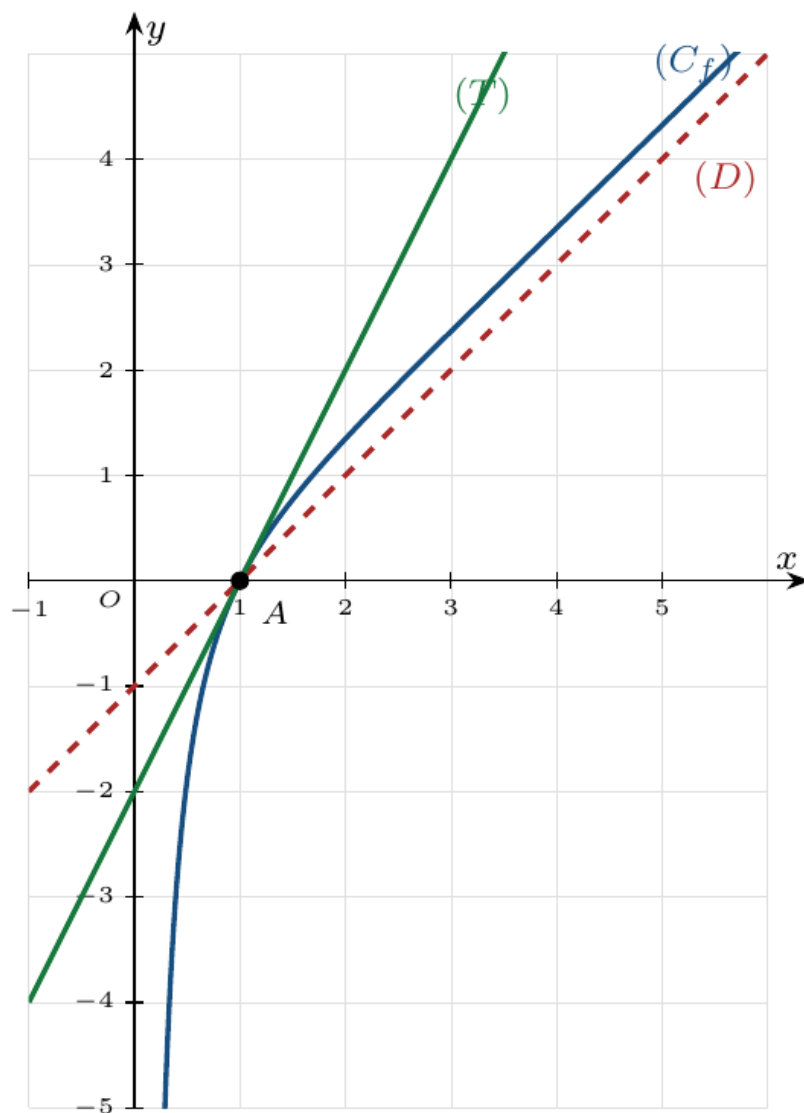
7. [1 pt] D'après la partie A, $g(x) > 0$, donc $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

8. [1 pt] $f(1) = 0$ et $f'(1) = \frac{g(1)}{1} = 2$. Donc $(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$, soit $(T) : y = 2x - 2$.

9. [1 pt] $f(1) = 1 - 1 + \frac{\ln 1}{1} = 0$, donc 1 est solution. Comme f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, elle est injective : l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution, $x = 1$.

10. [1,5 pt]



Bonus [+0,5 pt] $H'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}$: H est une primitive de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Une primitive de f est donc $F(x) = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$.