

Corrigé du devoir surveillé n° 2 (barème)

Étude de fonctions — Suites — Primitives

2^{ème} Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — barème

Exercice 1 : 8 pts ; exercice 2 : 9 pts ; exercice 3 : 3 pts ; bonus : $2 \times 0,5$ pt (note plafonnée à 20). Résultats vérifiés avec Python/sympy (build/verif_lot3.py).

Exercice 1 (8 points)

1. [0,5 pt] Quand $x \rightarrow 2^+$: $\frac{x}{x-2} \rightarrow +\infty$, donc $\sqrt{\frac{x}{x-2}} \rightarrow +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$. La droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à (C_f) .

2. a. [0,25 pt] $f(x) - (x-3) = 1 - \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \frac{1 - \frac{x}{x-2}}{1 + \sqrt{\frac{x}{x-2}}} = \frac{-2}{x-2} \times \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x}{x-2}}}$.

2. b. [0,75 pt] En $\pm\infty$: $\frac{-2}{x-2} \rightarrow 0$ et $\sqrt{\frac{x}{x-2}} \rightarrow 1$, donc $f(x) - (x-3) \rightarrow 0$: (D) est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

2. c. [1 pt] Le second facteur est positif. Sur $] -\infty; 0]$, $x-2 < 0$ donc $f(x) - (x-3) > 0$: (C_f) est **au-dessus** de (D) . Sur $]2; +\infty[$, $f(x) - (x-3) < 0$: (C_f) est **en dessous** de (D) .

3. a. [0,5 pt] Pour $x < 0$: $\sqrt{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{|x|} = -\frac{1}{x}$. Puis $\frac{f(x)+2}{x} = 1 - \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = 1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} \times \frac{x}{x-2}} = 1 + \sqrt{\frac{1}{x(x-2)}}$.

3. b. [0,75 pt] $f(0) = -2$. Quand $x \rightarrow 0^-$, $x(x-2) \rightarrow 0^+$, donc $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \rightarrow +\infty$: f n'est pas dérivable à gauche en 0 ; (C_f) admet au point $(0; -2)$ une demi-tangente verticale (dirigée vers le bas, la courbe arrivant par la gauche en montant).

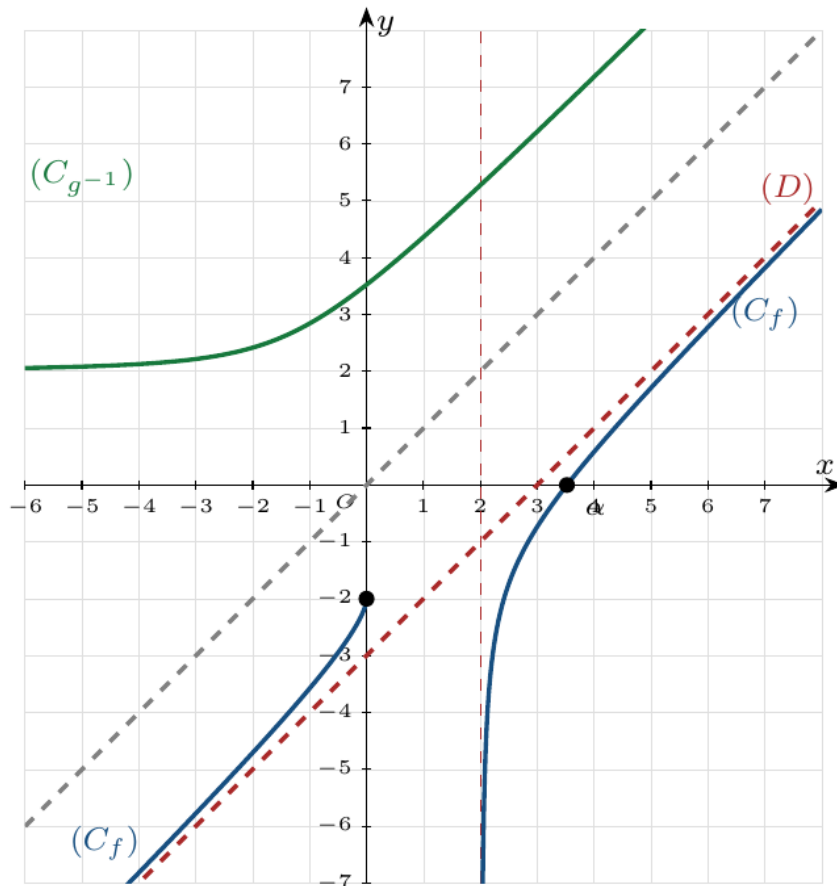
4. [1 pt] La dérivée de $x \mapsto \frac{x}{x-2}$ est $x \mapsto \frac{-2}{(x-2)^2}$, donc $f'(x) = 1 - \frac{\frac{-2}{(x-2)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{x-2}}} = 1 + \frac{1}{(x-2)^2 \sqrt{\frac{x}{x-2}}} > 0$. f est strictement croissante sur $] -\infty; 0]$ et sur $]2; +\infty[$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ -2		$+\infty$ ↗ $-\infty$	

5. a. [0,5 pt] Sur $] -\infty; 0]$, $f(x) \leq -2 < 0$: pas de solution. Sur $]2; +\infty[$, f est continue, strictement croissante et $f(]2; +\infty[) = \mathbb{R}$: une unique solution α . $f(3) = 1 - \sqrt{3} < 0$ et $f(4) = 2 - \sqrt{2} > 0$: $\alpha \in]3; 4[$ ($\alpha \approx 3,52$).

5. b. [0,25 pt] $f(\alpha) = 0$ donne $\alpha - 2 = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-2}}$, d'où $(\alpha - 2)^2 = \frac{\alpha}{\alpha - 2}$.

6. et 8. [1,25 + 0,5 pt]



7. a. [0,25 pt] g est continue et strictement croissante sur $]2; +\infty[$: réciproque définie sur $J = \mathbb{R}$.

7. b. [0,5 pt] $g(\alpha) = 0$ et $g'(\alpha) \neq 0$: $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(\alpha)}$. Or $\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-2}} = \alpha - 2$, donc $g'(\alpha) = 1 + \frac{1}{(\alpha-2)^3} = \frac{(\alpha-2)^3 + 1}{(\alpha-2)^3}$, d'où $(g^{-1})'(0) = \frac{(\alpha-2)^3}{1 + (\alpha-2)^3}$.

9. Bonus [+0,5 pt] D'après 5. b, $(\alpha-2)^3 = \alpha$, soit $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 12\alpha - 8 = \alpha$, d'où $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 11\alpha - 8 = 0$.

Exercice 2 (9 points)

1. [1,5 pt] Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 4$.

— *Initialisation* : $u_0 = 1 < 4$.

— *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < 4$. Alors $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 < 2 + 2 = 4$.

D'après le principe du raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 4$.

2. a. [1,5 pt] $u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{2}u_n = \frac{4 - u_n}{2} > 0$: (u_n) est strictement croissante.

2. b. [1 pt] Croissante et majorée par 4 : (u_n) converge.

3. a. [2 pts] $v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 - 4 = \frac{1}{2}(u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n$; $v_0 = -3$, donc $v_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3. b. [2 pts] $u_n = v_n + 4 = 4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$; comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

4. [1 pt] $u_n > 3,99 \iff 3\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,01 \iff 2^n > 300$. Or $2^8 = 256$ et $2^9 = 512$: $n = 9$.

5. Bonus [+0,5 pt] $S_n = 4(n+1) - 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 4n - 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$, donc $\frac{S_n}{n} = 4 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 4$.

Exercice 3 (3 points)

1. $F(x) = \frac{x^{10}}{10}$.
2. $f = \frac{1}{2}u'u^3$ avec $u(x) = x^2 + 1$: $F(x) = \frac{(x^2 + 1)^4}{8}$.
3. $f = 2 \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2 + 4x + 1 > 0$ sur $]0; +\infty[$: $F(x) = 4\sqrt{x^2 + 4x + 1}$.