

# Corrigé du devoir surveillé n° 1 (barème)

## Continuité — Dérivation

2<sup>ème</sup> Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

### Remarque — barème

Exercice 1 : 5 pts ; exercice 2 : 5 pts ; exercice 3 : 10 pts ; bonus :  $2 \times 0,5$  pt (note plafonnée à 20). La répartition des points est indiquée entre crochets. Résultats vérifiés avec Python/sympy (`build/verif_lot1.py`).

### Exercice 1 (5 points)

- [1 pt] Avec l'indice 12 :  $\sqrt[6]{10} = \sqrt[12]{100}$ ,  $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{81}$ ,  $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{125}$  [0,5]. Donc  $\sqrt[3]{3} < \sqrt[6]{10} < \sqrt[4]{5}$  [0,5].
- [2 pts] •  $\sqrt[3]{x+7} - 2 = \frac{x-1}{\sqrt[3]{(x+7)^2 + 2\sqrt[3]{x+7} + 4}}$ , d'où  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x-1} = \frac{1}{12}$  [1].  
• Avec  $A = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 1}$  :  $A - x = \frac{3x^2 + 1}{A^2 + Ax + x^2} = \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\left(\frac{A}{x}\right)^2 + \frac{A}{x} + 1}$  et  $\frac{A}{x} = \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}} \rightarrow 1$  : la limite vaut 1 [1].
- [1 pt]  $(x-2)(x^2 - 2x + 1) = x^3 - 2x^2 + x - 2x^2 + 4x - 2 = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$  [0,25]. Pour  $x \neq 2$  :  $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 2} 1$  [0,5]. Comme  $1 \neq f(2) = 2$ ,  $f$  n'est pas continue en 2 [0,25].
- [1 pt]  $\frac{g(x) - 5}{x - 3} = \frac{x^2 + 16 - 25}{(x-3)(\sqrt{x^2 + 16} + 5)} = \frac{x+3}{\sqrt{x^2 + 16} + 5} \xrightarrow{x \rightarrow 3} \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$  [0,5]. Donc  $g$  est dérivable en 3 et  $g'(3) = \frac{3}{5}$  :  $(C_g)$  admet au point  $(3; 5)$  une tangente de coefficient directeur  $\frac{3}{5}$ , d'équation  $y = \frac{3}{5}x + \frac{16}{5}$  [0,5].

### Exercice 2 (5 points)

- [1 pt]  $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$  [0,5] :  $f$  est strictement croissante sur  $] -\infty; 1]$  et sur  $[2; +\infty[$ , strictement décroissante sur  $[1; 2]$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  [0,5].

|         |           |   |    |           |    |   |           |
|---------|-----------|---|----|-----------|----|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 1 | 2  | $+\infty$ |    |   |           |
| $f'(x)$ |           | + | 0  | -         | 0  | + |           |
| $f(x)$  |           |   | -1 |           | -2 |   | $+\infty$ |

- [1 pt] Sur  $] -\infty; 2]$ ,  $f(x) \leq f(1) = -1 < 0$  : pas de solution [0,5]. Sur  $[2; +\infty[$ ,  $f$  est continue, strictement croissante,  $f(2) = -2 < 0$  et  $f(3) = 54 - 81 + 36 - 6 = 3 > 0$  : une unique solution, située dans  $]2; 3[$  [0,5].
- [1 pt] D'après 2 :  $f(x) < 0$  pour  $x < \alpha$ ,  $f(\alpha) = 0$ ,  $f(x) > 0$  pour  $x > \alpha$  [0,5]. Ensuite  $(x-1)^2(2x-5) = (x^2 - 2x + 1)(2x-5) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 = f(x) + 1 = f(x) - f(1)$ . Comme  $(x-1)^2 \geq 0$ ,  $f(x) - f(1)$  a le signe de  $2x-5$  (et s'annule en 1) :  $f(x) - f(1) \leq 0$  sur  $] -\infty; \frac{5}{2}]$ ,  $f(x) - f(1) > 0$  sur  $]\frac{5}{2}; +\infty[$  [0,5].

|               |           |   |          |               |           |
|---------------|-----------|---|----------|---------------|-----------|
| $x$           | $-\infty$ | 1 | $\alpha$ | $\frac{5}{2}$ | $+\infty$ |
| $f(x)$        | –         | – | 0        | +             | +         |
| $f(x) - f(1)$ | –         | 0 | –        | –             | +         |

4. [1 pt]  $f\left(\frac{5}{2}\right) = -1 < 0$  et  $f(3) > 0 : \frac{5}{2} < \alpha < 3$ .

5. [1 pt]  $\alpha \neq 0$ ; en divisant  $2\alpha^3 - 9\alpha^2 + 12\alpha - 6 = 0$  par  $\alpha : 2\alpha^2 - 9\alpha + 12 = \frac{6}{\alpha}$  [0,5]. Or  $2\alpha^2 - 9\alpha + 12 = 2\left(\alpha - \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{81}{8} + 12 = 2\left(\alpha - \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}$  [0,5].

### Exercice 3 (10 points)

1. [0,5 pt]  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \sqrt{x^2 - 9}) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ .

2. [1 pt]  $f(3) = 2 - 0 = 2$ . À gauche :  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 4x + 5) = 9 - 12 + 5 = 2 = f(3)$  [0,5]. À droite :  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2 - \sqrt{x^2 - 9}) = 2 = f(3)$  [0,5]. Donc  $f$  est continue à gauche et à droite en 3 :  $f$  est continue en 3.

3. [1 pt] Sur  $] -\infty; 3[$ ,  $f$  coïncide avec une fonction polynôme, donc elle y est continue; sur  $]3; +\infty[$ ,  $f(x) = 2 - \sqrt{x^2 - 9}$  est continue ( $x^2 - 9 > 0$ ). Avec la continuité en 3 (question 2),  $f$  est continue sur  $] -\infty; 3]$  et sur  $]3; +\infty[$ , donc sur  $\mathbb{R} = ] -\infty; 3] \cup ]3; +\infty[$ .

4. a. [0,25 pt] Pour  $x > 3 : (x-3)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} = \sqrt{(x-3)^2 \times \frac{x+3}{x-3}} = \sqrt{(x-3)(x+3)} = \sqrt{x^2 - 9}$  (car  $x-3 > 0$ ).

4. b. [1,25 pt] Pour  $x > 3 : \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = -\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x-3} = -\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} \xrightarrow{x \rightarrow 3^+} -\infty$  [0,75].  $f$  n'est pas dérivable à droite en 3 :  $(C_f)$  admet au point  $(3; 2)$  une demi-tangente verticale dirigée vers le bas [0,5].

5. a. [1,25 pt] Sur  $] -\infty; 3[ : f'(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$  [0,5]. Sur  $]3; +\infty[ : f'(x) = -\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 9}}$  [0,75].

5. b. [1,5 pt] Si  $x < 2 : f'(x) < 0$ ; si  $2 < x < 3 : f'(x) > 0$ ; si  $x > 3 : f'(x) < 0$  [0,75]. Avec  $f(2) = 1$  et  $f(3) = 2$  [0,75] :

|         |           |   |   |           |
|---------|-----------|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 2 | 3 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | –         | 0 | + | –         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | 1 | 2 | $-\infty$ |

6. a. [1 pt]  $g$  est continue et strictement décroissante sur  $]3; +\infty[$  : elle admet une réciproque définie sur  $J = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) \right[ = ] -\infty; 2[$ .

6. b. [0,75 pt]  $g(5) = 2 - \sqrt{16} = -2$  [0,25].  $g$  est dérivable en 5 et  $g'(5) = -\frac{5}{4} \neq 0$ , donc  $g^{-1}$  est dérivable en  $-2$  et  $(g^{-1})'(-2) = \frac{1}{g'(5)} = -\frac{4}{5}$  [0,5].

6. c. [0,5 pt]  $y = (g^{-1})'(-2)(x+2) + g^{-1}(-2) = -\frac{4}{5}(x+2) + 5$ , soit  $y = -\frac{4}{5}x + \frac{17}{5}$ .

6. d. [0,5 pt]  $g^{-1}$  est strictement décroissante sur  $J = ] -\infty; 2[$ , de  $+\infty$  (en  $-\infty$ ) à 3 (en  $2^-$ ).

|             |           |     |
|-------------|-----------|-----|
| $x$         | $-\infty$ | $2$ |
| $g^{-1}(x)$ | $+\infty$ | $3$ |

**6. e. [0,5 pt]** Pour  $x \in J$  et  $y > 3$  :  $g(y) = x \iff \sqrt{y^2 - 9} = 2 - x \iff y^2 = 9 + (2 - x)^2$  (car  $2 - x > 0$ )  
 $\iff y = \sqrt{9 + (2 - x)^2}$  (car  $y > 0$ ). Donc  $g^{-1}(x) = \sqrt{9 + (2 - x)^2}$ .

**Bonus 7. [+0,5 pt]** Pour  $x \geq 3$  :  $f(x) + x = 2 + (x - \sqrt{x^2 - 9}) = 2 + \frac{9}{x + \sqrt{x^2 - 9}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2$ .

**Bonus 8. [+0,5 pt]** D'après le tableau de variations : sur  $] -\infty; 2]$ ,  $f$  décroît strictement de  $+\infty$  à 1 ; sur  $[2; 3]$ , elle croît strictement de 1 à 2 ; sur  $[3; +\infty[$ , elle décroît strictement de 2 à  $-\infty$ . Comme  $\frac{3}{2} \in ]1; 2[$ , l'équation  $f(x) = \frac{3}{2}$  a exactement une solution dans chacun de ces trois intervalles : **trois solutions** (à savoir  $2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\frac{\sqrt{37}}{2}$ ).