

Corrigé du devoir maison n° 3

Fonctions logarithmes — Nombres complexes

2^{ème} Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — vérification

Tous les résultats ont été contrôlés avec Python/sympy (build/verif_dm3.py).

Exercice 1

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln(x) + \frac{1}{2}(\ln x)^2, D_f =]0; +\infty[.$$

1. [1 pt] Posons $X = \ln x$: quand $x \rightarrow 0^+$, $X \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{2}X^2 - X = X\left(\frac{1}{2}X - 1\right) \rightarrow +\infty$; comme $x + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. La droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est **asymptote verticale** à (C_f) .

2. [1 pt] $\left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x = \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x$, d'où l'égalité. Quand $x \rightarrow +\infty$: $\ln x \rightarrow +\infty$ et $\frac{1}{2}\ln x - 1 \rightarrow +\infty$, donc le produit tend vers $+\infty$; ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. a. [0,5 pt] Pour $x > 0$, posons $x = t^2$ avec $t = \sqrt{x} > 0$; $x \rightarrow +\infty \iff t \rightarrow +\infty$. Alors $\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{(2 \ln t)^2}{t^2} = 4 \left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 \rightarrow 4 \times 0^2 = 0$.

3. b. [1 pt] $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(\ln x)^2}{x} \rightarrow 1$ et $f(x) - x = \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x \rightarrow +\infty$. Donc (C_f) admet une **branche parabolique de direction la droite** $(\Delta) : y = x$ au voisinage de $+\infty$.

4. [1 pt] Si $0 < x < 1$: $x - 1 < 0$ et $\ln x < 0$, donc $(x - 1) + \ln x < 0$. Si $x \geq 1$: $x - 1 \geq 0$ et $\ln x \geq 0$, donc $(x - 1) + \ln x \geq 0$ (avec égalité seulement en $x = 1$).

5. a. [1 pt] f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \times 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{x - 1 + \ln x}{x}$.

5. b. [0,75 pt] Comme $x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $(x - 1) + \ln x$ (question 4) : $f'(x) < 0$ sur $]0; 1[$, $f'(1) = 0$, $f'(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$. $f(1) = 1 + \frac{1}{2} - 0 + 0 = \frac{3}{2}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

f est strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$; minimum $\frac{3}{2}$ atteint en 1.

5. c. [0,75 pt] f est continue et strictement croissante sur $I = [1; e]$, donc $f(I) = [f(1); f(e)]$. $f(e) = e + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = e$. Ainsi $f(I) = \left[\frac{3}{2}; e\right] \subset [1; e] = I$.

6. a. [0,75 pt] $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$, donc $f''(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{2 - \ln x}{x^2}$.

6. b. [0,75 pt] $x^2 > 0$; $2 - \ln x > 0 \iff x < e^2$. Donc f'' s'annule en e^2 en changeant de signe ((C_f) convexe sur $]0; e^2]$, concave sur $[e^2; +\infty[$). $f(e^2) = e^2 + \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2} \times 4 = e^2 + \frac{1}{2}$. Point d'inflexion : $J\left(e^2; e^2 + \frac{1}{2}\right)$.

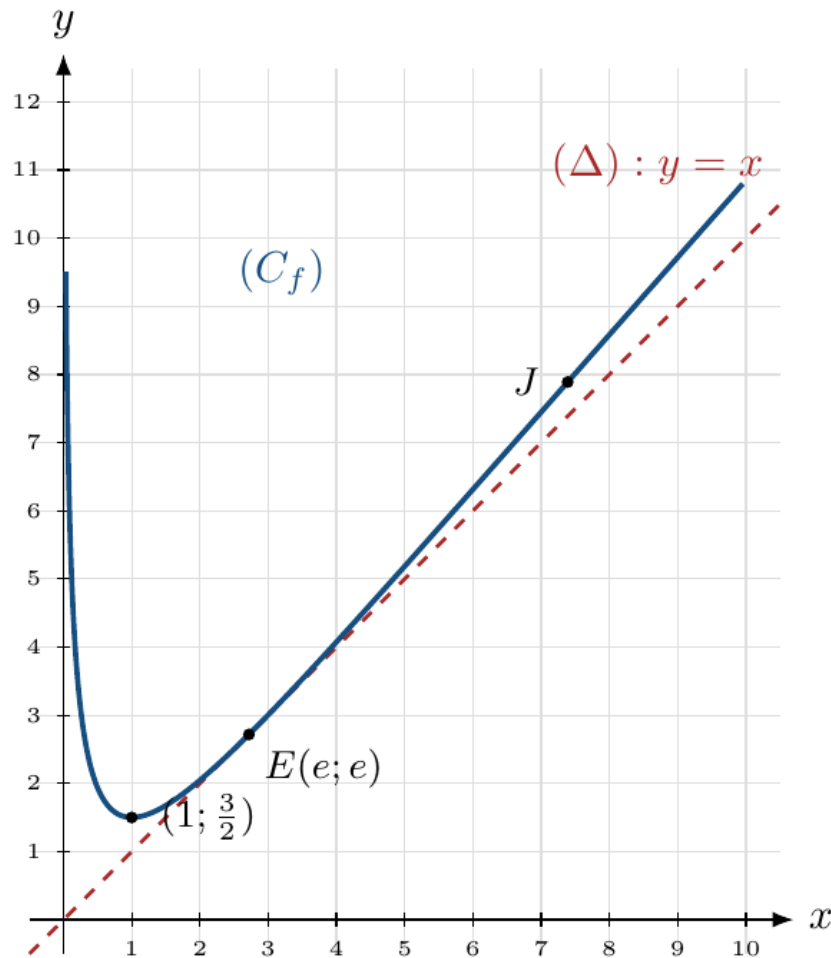
7. a. [0,5 pt] $\frac{1}{2}(\ln x - 1)^2 = \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2} = f(x) - x$.

7. b. [0,5 pt] $f(x) = x \iff (\ln x - 1)^2 = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$. $S = \{e\}$.

7. c. [0,5 pt] $f(x) - x \geq 0$ pour tout $x > 0$: (C_f) est **au-dessus** de (Δ) sur $]0; +\infty[$, et elles se coupent uniquement au point $E(e; e)$ (où, de plus, $f'(e) = 1$: (Δ) y est tangente à (C_f)).

8. [1 pt] Éléments utiles : asymptote $x = 0$, minimum $\left(1; \frac{3}{2}\right)$, point $E(e; e)$ de contact avec (Δ) , inflexion

$J(e^2; e^2 + \frac{1}{2}) \approx (7,39; 7,89)$, branche parabolique de direction (Δ) .



9. a. [0,75 pt] *Initialisation* : $u_0 = 1 \in [1; e]$. *Hérédité* : si $1 \leq u_n \leq e$, alors $u_n \in I$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \in f(I) \subset I$ (question 5.c), soit $1 \leq u_{n+1} \leq e$. *Conclusion* : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq e$.

9. b. [0,5 pt] $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{1}{2} (\ln u_n - 1)^2 \geq 0$ (question 7.a) : (u_n) est **croissante**.

9. c. [0,75 pt] (u_n) est croissante et majorée par e , donc convergente ; soit ℓ sa limite. Comme $1 \leq u_n \leq e$, $\ell \in I$. f est continue sur I et $f(I) \subset I$, donc ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$; d'après 7.b, $\ell = e$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$.

Exercice 2

1. [1 pt] $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4 = (2i)^2 < 0$. Deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$ et $z_2 = \bar{z}_1 = 1 + i$. $S = \{1 - i; 1 + i\}$.

2. a. [0,5 pt] $|a| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ et $a = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$, donc $a = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$.

2. b. [1,25 pt] $\frac{b}{a} = \frac{(2 + \sqrt{3} + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2 + \sqrt{3} - 1 + i(2 + \sqrt{3} + 1)}{2} = \frac{(1 + \sqrt{3}) + i(3 + \sqrt{3})}{2}$. Or $3 + \sqrt{3} = \sqrt{3}(1 + \sqrt{3})$, d'où $\frac{b}{a} = (1 + \sqrt{3}) \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = (1 + \sqrt{3}) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$.

Comme $1 + \sqrt{3} > 0$: $\left| \frac{b}{a} \right| = 1 + \sqrt{3}$, $\arg \frac{b}{a} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Donc $|b| = |a| \left| \frac{b}{a} \right| = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3}) = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ et $\arg b \equiv \arg a + \arg \frac{b}{a} \equiv -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12} [2\pi]$:

$$b = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right).$$

2. c. [0,75 pt] Par la formule de Moivre : $b^6 = (\sqrt{2} + \sqrt{6})^6 \left(\cos \frac{6\pi}{12} + i \sin \frac{6\pi}{12} \right) = (\sqrt{2} + \sqrt{6})^6 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) =$

$i(\sqrt{2} + \sqrt{6})^6$. Sa partie réelle est nulle et sa partie imaginaire non nulle : b^6 est imaginaire pur. (Valeur : $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^6 = 2^3(1 + \sqrt{3})^6 = 8(208 + 120\sqrt{3})$, donc $b^6 = (1664 + 960\sqrt{3})i$.)

3. a. [0,75 pt] $c - a = -2 + i(1 + \sqrt{3})$ et $b - a = (1 + \sqrt{3}) + 2i$. Or $i(b - a) = i(1 + \sqrt{3}) + 2i^2 = -2 + i(1 + \sqrt{3}) = c - a$. Comme $b \neq a$, $\frac{c - a}{b - a} = i$.

3. b. [1 pt] $\frac{AC}{AB} = \left| \frac{c - a}{b - a} \right| = |i| = 1$, donc $AC = AB$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg \frac{c - a}{b - a} \equiv \arg i \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Le triangle ABC est **rectangle et isocèle en A**.

4. a. [1 pt] $z - 2 - \sqrt{3} - i = z - b$ et $z + 1 - i\sqrt{3} = z - c$. Donc $M \in (E) \iff |z - b| = |z - c| \iff BM = CM$. Comme $B \neq C$, (E) est **la médiatrice du segment $[BC]$** .

4. b. [0,75 pt] Le milieu K de $[BC]$ vérifie $KB = KC$, donc $K \in (E)$. Vérification par le calcul : $z_K = \frac{b + c}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i$, et $|z_K - b| = |z_K - c| = \frac{|b - c|}{2} = \frac{\sqrt{(3 + \sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})^2}}{2} = \frac{\sqrt{16 + 4\sqrt{3}}}{2} = \sqrt{4 + \sqrt{3}}$. (Remarque : $A \in (E)$ aussi, puisque $AB = AC$.)