

Corrigé du devoir maison n° 2

Étude de fonctions — Suites — Primitives

2^{ème} Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — vérification

Tous les résultats ont été contrôlés avec Python/sympy (build/verif_lot3.py).

Exercice 1

- $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$; par somme, produit et puissance, f est continue sur $[0; +\infty[$.
- $f(0) = 0$ et, pour $x > 0$: $\frac{f(x) - f(0)}{x} = (\sqrt{x} - 3)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 9$. f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 9$: (C_f) admet à l'origine une demi-tangente d'équation $y = 9x$ ($x \geq 0$).
- a.** Pour $x > 0$: $f'(x) = (\sqrt{x} - 3)^2 + x \times 2(\sqrt{x} - 3) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = (\sqrt{x} - 3)[(\sqrt{x} - 3) + \sqrt{x}] = (\sqrt{x} - 3)(2\sqrt{x} - 3)$.
- b.** $2\sqrt{x} - 3 = 0 \iff x = \frac{9}{4}$ et $\sqrt{x} - 3 = 0 \iff x = 9$. $f\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{9}{4} \times \left(\frac{3}{2} - 3\right)^2 = \frac{81}{16}$; $f(9) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

x	0	$\frac{9}{4}$	9	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{81}{16}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- c.** $f(x) = x(\sqrt{x} - 3)^2 \geq 0$ sur $[0; +\infty[$, avec égalité seulement en 0 et en 9.
- d.** On pose $\varphi(x) = f(x) - x + 3$ sur $\left[\frac{9}{4}; 9\right]$. φ est continue et strictement décroissante (somme de deux fonctions strictement décroissantes). $\varphi\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{81}{16} - \frac{9}{4} + 3 = \frac{93}{16} > 0$ et $\varphi(9) = -6 < 0$: l'équation $\varphi(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x - 3$, admet une unique solution $\alpha \in \left]\frac{9}{4}; 9\right[$ ($\alpha \approx 5,43$).
- a.** g est continue et strictement croissante sur $[9; +\infty[$: elle admet une réciproque définie sur $J = [g(9); +\infty[= [0; +\infty[$.
- b.** g^{-1} est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, de $g^{-1}(0) = 9$ à $+\infty$.

x	0	$+\infty$
$g^{-1}(x)$	9	$\nearrow +\infty$

- c.** $g(16) = 16 \times (4 - 3)^2 = 16$. g est dérivable en 16 et $g'(16) = (4 - 3)(8 - 3) = 5 \neq 0$: $(g^{-1})'(16) = \frac{1}{g'(16)} = \frac{1}{5}$.

5. a. Soit $x \in J$ et $y \geq 9$; on pose $s = \sqrt{y} \geq 3$. Alors $g(y) = x \iff (s(s-3))^2 = x \iff s(s-3) = \sqrt{x}$ (car $s(s-3) \geq 0 \iff s^2 - 3s - \sqrt{x} = 0$). Les racines sont $\frac{3 \pm \sqrt{9+4\sqrt{x}}}{2}$; seule $\frac{3 + \sqrt{9+4\sqrt{x}}}{2}$ est supérieure ou égale à 3. Donc $g^{-1}(x) = s^2 = \left(\frac{3 + \sqrt{9+4\sqrt{x}}}{2}\right)^2$.

5. b. On note $W = \sqrt{9+4\sqrt{x}}$ (pour $x > 0$).

Méthode 1 (dérivation directe). $W' = \frac{\frac{4}{2\sqrt{x}}}{2W} = \frac{1}{\sqrt{x}W}$, donc $(g^{-1})'(x) = 2 \times \frac{3+W}{2} \times \frac{W'}{2} = \frac{3+W}{2\sqrt{x}W}$.

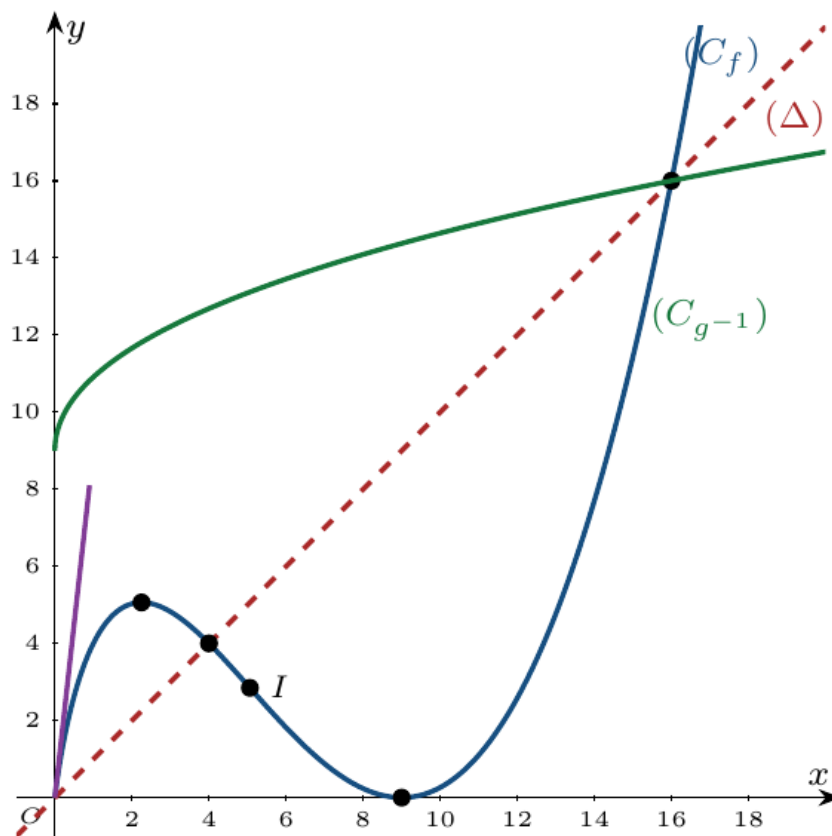
Méthode 2 (formule de la réciproque). Avec $s = \frac{3+W}{2}$: $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(s^2)} = \frac{1}{(s-3)(2s-3)} = \frac{1}{\frac{W-3}{2} \times W} = \frac{2}{W(W-3)}$. Comme $(W+3)(W-3) = W^2 - 9 = 4\sqrt{x}$, les deux expressions sont égales : $(g^{-1})'(x) = \frac{3 + \sqrt{9+4\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\sqrt{9+4\sqrt{x}}}$ (contrôle : $x = 16$ donne $W = 5$ et $\frac{1}{5}$).

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = (\sqrt{x} - 3)^2 \rightarrow +\infty$: **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.**

7. $f'(x) = 2x - 9\sqrt{x} + 9$, donc $f''(x) = 2 - \frac{9}{2\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{x} - 9}{2\sqrt{x}}$. $f''(x) < 0$ sur $]0; \frac{81}{16}[$ (concave) et $f''(x) > 0$ sur $]\frac{81}{16}; +\infty[$ (convexe). Unique point d'inflexion : $I\left(\frac{81}{16}; \frac{729}{256}\right)$, car $f\left(\frac{81}{16}\right) = \frac{81}{16}\left(\frac{9}{4} - 3\right)^2 = \frac{729}{256}$.

8. $f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 9$: (C_f) coupe (Ox) en $O(0;0)$ et $(9;0)$, et coupe (Oy) en O .

9. et 10.



11. $f(x) = x \iff x = 0$ ou $(\sqrt{x} - 3)^2 = 1 \iff x \in \{0; 4; 16\}$ (abscisses des points communs à (C_f) et (Δ)). $f(x) \leq x \iff x \in \{0\} \cup [4; 16]$ ((C_f) sous (Δ)). $g^{-1}(x) = 16 \iff x = g(16) = 16$: $S = \{16\}$.

Exercice 2

I. 1. $u_1 = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$ et $u_2 = 3 - \frac{6}{7} = \frac{15}{7}$.

I. 2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.

— *Initialisation* : $u_0 = 3 > 2$.

— *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 2$. Alors $u_{n+1} - 2 = \frac{3u_n - 2 - 2u_n}{u_n} = \frac{u_n - 2}{u_n} > 0$.

D'après le principe du raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.

I. 3. $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - 2 - u_n^2}{u_n} = -\frac{u_n^2 - 3u_n + 2}{u_n} = -\frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{u_n}$.

I. 4. Comme $u_n > 2$, $u_{n+1} - u_n < 0$: (u_n) est décroissante ; minorée par 2, elle converge.

II. 1. $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{u_n}$ avec $u_n - 2 > 0$ et $\frac{1}{u_n} < \frac{1}{2}$: $u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{2}(u_n - 2)$.

II. 2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

— *Initialisation* : $u_0 - 2 = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$.

— *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. D'après II.1 : $u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{2}(u_n - 2) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

D'après le principe du raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

II. 3. $0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

III. 1. $u_{n+1} - 1 = \frac{2(u_n - 1)}{u_n}$ et $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{u_n}$, donc $v_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2(u_n - 1)} = \frac{1}{2}v_n$: géométrique de raison $\frac{1}{2}$, de premier terme $v_0 = \frac{1}{2}$.

III. 2. $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$; de $v_n(u_n - 1) = u_n - 2$ on tire $u_n = \frac{2 - v_n}{1 - v_n} = \frac{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$.

III. 3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \rightarrow 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

IV. 1. $h(x) = 3 - \frac{2}{x}$, $h'(x) = \frac{2}{x^2} > 0$: h est strictement croissante sur I .

IV. 2. $h(u_n) = \frac{3u_n - 2}{u_n} = u_{n+1}$.

IV. 3. D'après I.2, $u_n > 2$, donc $u_n \in I$.

IV. 4. $h(I) = \left[h(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)\right[= [2; 3[\subset I$.

IV. 5. (u_n) converge vers $\ell \in I$; h est continue sur I et $h(I) \subset I$, donc $h(\ell) = \ell$, soit $\ell^2 - 3\ell + 2 = 0$: $\ell = 1$ ou $\ell = 2$. Comme $1 \notin I$: $\ell = 2$.

Exercice 3

1. $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + x$	2. $F(x) = \frac{3}{4}(x+2)\sqrt[3]{x+2}$
3. $F(x) = -\frac{4}{x}$	4. $F(x) = -\frac{1}{x^2+1}$
5. $F(x) = -\frac{\cos^3 x}{3}$	6. $F(x) = x - \tan x$ (car $-\tan^2 x = 1 - (1 + \tan^2 x)$)
7. $F(x) = \frac{1}{1-2x}$	8. $F(x) = -\frac{2}{3x\sqrt{x}}$ (car $f(x) = x^{-\frac{5}{2}}$)
9. $F(x) = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x}$	10. $F(x) = \frac{1}{3}(x^2+9)\sqrt{x^2+9}$
11. $F(x) = 2\sqrt{x^2+x+4}$	12. $F(x) = \frac{\sin(3x)}{3} - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$
13. $F(x) = -\frac{3}{2x^2} + \frac{2}{x}$	14. $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$
15. $F(x) = -\frac{1}{x^3+x^2+5}$	16. $F(x) = -\frac{1}{2(x^2-1)}$