

Corrigé du devoir maison n° 1

Continuité — Dérivation

2^{ème} Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — vérification

Tous les résultats ont été contrôlés avec Python/sympy (build/verif_lot1.py).

Exercice 1

1. Équation. Elle est définie pour $x \geq 0$, et alors $\sqrt[3]{x} + 1 \geq 1 > 0$. Donc $(\sqrt[3]{x} + 1)^3 = 27 \iff \sqrt[3]{x} + 1 = \sqrt[3]{27} = 3 \iff \sqrt[3]{x} = 2 \iff x = 8$. $S = \{8\}$.

Inéquation. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ ($x^2 + 23 > 0$) et s'écrit $\sqrt[3]{x^2 + 23} < x + 1$.

- Si $x \leq -1$: $x + 1 \leq 0 < \sqrt[3]{x^2 + 23}$: l'inéquation n'est pas vérifiée.
- Si $x > -1$: les deux membres sont positifs, donc l'inéquation équivaut à $x^2 + 23 < (x + 1)^3$, soit $x^3 + 2x^2 + 3x - 22 > 0$. Or 2 est racine et $x^3 + 2x^2 + 3x - 22 = (x - 2)(x^2 + 4x + 11)$, avec $x^2 + 4x + 11 = (x + 2)^2 + 7 > 0$. L'inéquation équivaut donc à $x > 2$.

$S =]2; +\infty[$.

2. • $\sqrt[3]{x + 5} - 2 = \frac{(x + 5) - 8}{\sqrt[3]{(x + 5)^2} + 2\sqrt[3]{x + 5} + 4}$, donc $\frac{\sqrt[3]{x + 5} - 2}{x - 3} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x + 5)^2} + 2\sqrt[3]{x + 5} + 4} \xrightarrow{x \rightarrow 3} \frac{1}{12}$.

• Pour $x > 0$: $\sqrt[3]{x^3 + 1} - 2x = x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} - 2 \right)$ et la parenthèse tend vers -1 : la limite vaut $-\infty$.

• Avec $A = \sqrt[3]{x^3 + 1}$: $A - x = \frac{A^3 - x^3}{A^2 + Ax + x^2} = \frac{1}{A^2 + Ax + x^2}$, et le dénominateur tend vers $+\infty$: la limite vaut 0.

3. $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$ et $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$. Comme $81 < 125$: $\sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$.

4. Avec l'indice 12 : $\sqrt{2} = \sqrt[12]{64}$, $\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{16}$, $\sqrt[6]{6} = \sqrt[12]{36}$, $\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{27}$. Donc $\sqrt[3]{2} < \sqrt[4]{3} < \sqrt[6]{6} < \sqrt{2}$.

Exercice 2

1. Pour $x \geq 0$, $x^2 + 2x = x(x + 2) \geq 0$; $x \mapsto x^2 + 2x$ est continue et positive sur $[0; +\infty[$, donc $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x}$ y est continue. Par somme avec $x \mapsto x^2 - 2$, **f est continue sur $[0; +\infty[$.**

2. a. $f(0) = -2$. Pour $x > 0$: $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x^2 + \sqrt{x^2 + 2x}}{x} = x + \sqrt{\frac{x^2 + 2x}{x^2}} = x + \sqrt{\frac{x + 2}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$. f n'est pas dérivable à droite en 0 : (C_f) admet au point $A(0; -2)$ une **demi-tangente verticale** dirigée vers le haut.

2. b. Sur $]0; +\infty[$, $x^2 + 2x > 0$: f est dérivable et $f'(x) = 2x + \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = 2x + \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$.

2. c. Pour $x > 0$, $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, avec $f(0) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-2	$+\infty$

3. f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$: elle admet une réciproque définie sur $f([0; +\infty[) = [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [-2; +\infty[$.

4. a. $0 \in [-2; +\infty[$: d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0; +\infty[$. Comme $f(0) = -2 < 0$ et $f(1) = -1 + \sqrt{3} > 0$, on a $\alpha \in]0; 1[$.

4. b. $f(\alpha) = 0$ s'écrit $\alpha^2 - 2 + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha} = 0$, d'où $\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha} = 2 - \alpha^2$.

5. f^{-1} a le même sens de variation que f : f^{-1} est strictement croissante sur $[-2; +\infty[$.

6. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) > 0$ (donc $f'(x) \neq 0$) sur cet intervalle ; ainsi f^{-1} est dérivable sur $f(]0; +\infty[) =]-2; +\infty[$.

Exercice 3

I. 1. a. $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ pour tout réel x : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1. b. f est continue, strictement croissante, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2. a. $0 \in f(\mathbb{R})$: l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α . $f(-2) = -8 - 4 + 4 = -8 < 0$ et $f(-1) = -1 - 2 + 4 = 1 > 0$: $-2 < \alpha < -1$.

2. b. $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} - 3 + 4 = -\frac{27}{8} + 1 = -\frac{19}{8} < 0$ et $f(-1) > 0$: $-\frac{3}{2} < \alpha < -1$ (amplitude $\frac{1}{2}$).

2. c. $f(\alpha) = 0$ donne $-\alpha^3 = 2\alpha + 4$. Or $-\alpha > 0$ et $2\alpha + 4 > 0$ (car $\alpha > -2$) : $-\alpha$ est le réel positif dont le cube est $2\alpha + 4$, c'est-à-dire $-\alpha = \sqrt[3]{2\alpha + 4}$. Donc $\alpha = -\sqrt[3]{2\alpha + 4}$.

3. f est strictement croissante et $f(\alpha) = 0$: $f(x) < 0$ pour $x < \alpha$, $f(\alpha) = 0$, $f(x) > 0$ pour $x > \alpha$.

II. 1. a. $g'(x) = \frac{1}{4} \times 4x^3 + 2x + 4 = x^3 + 2x + 4 = f(x)$.

1. b. g' a le signe de f : g est strictement décroissante sur $] -\infty; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$. En $\pm\infty$: $g(x) = x^4 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) \rightarrow +\infty$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(\alpha)$	$+\infty$

2. a. De $\alpha^3 = -2\alpha - 4$ on tire $\alpha^4 = \alpha \times \alpha^3 = -2\alpha^2 - 4\alpha$. Donc

$$g(\alpha) = \frac{-2\alpha^2 - 4\alpha}{4} + \alpha^2 + 4\alpha = \frac{\alpha^2}{2} + 3\alpha = \frac{\alpha(\alpha + 6)}{2}.$$

2. b. $\alpha < 0$ et $\alpha + 6 > 0$ (car $\alpha > -2$) : $g(\alpha) < 0$.

2. c. Sur $] -\infty; \alpha]$, g est continue, strictement décroissante, et $g(]-\infty; \alpha]) = [g(\alpha); +\infty[$ contient 0 : une unique solution. Sur $[\alpha; +\infty[$, de même $g([\alpha; +\infty[) = [g(\alpha); +\infty[$: une unique solution (c'est 0, car $g(0) = 0$). **L'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.**