

Série d'exercices n° 11

Géométrie de l'espace

2BAC PC SVT · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Dans toute la série, l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 1 — *Produit scalaire et plan*

★★★★★

On considère les points $A(2; 1; 1)$ et $B(1; 0; 3)$, et le vecteur $\vec{n} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$.

- 1) Vérifier que les points O , A et B ne sont pas alignés.
- 2) Montrer, par deux méthodes, que $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
- 3) En déduire une équation cartésienne du plan (OAB) .
- 4) Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A et orthogonale au plan (OAB) .

[► Afficher / Masquer la solution](#)**Exercice 2** — *Droites et plans*

★★★★★

On considère les points $A(1; -1; 0)$, $B(2; 1; 3)$ et $C(2; 0; -1)$, et le plan (P) d'équation $x + 2y + 3z - 27 = 0$.

- 1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .
b) Vérifier que la droite (AB) est orthogonale au plan (P) .
c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AB) et de (P) .
- 2) Montrer que la droite (AC) est parallèle au plan (P) .
- 3) Donner une équation cartésienne du plan (Q) passant par B et parallèle à (P) .

[► Afficher / Masquer la solution](#)

Exercice 3 — Sphère et plans



On considère le plan (P) d'équation $x + 2y - 2z + 4 = 0$ et l'ensemble (S) des points $M(x; y; z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$.

- 1) Montrer que (S) est une sphère dont on déterminera le centre Ω et le rayon R .
- 2) Montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) dont on déterminera le centre H et le rayon r .
- 3) Déterminer une équation cartésienne de chacun des deux plans tangents à (S) et parallèles à (P) .
- 4) On considère le plan (Q) d'équation $2x + y + 2z + 3 = 0$. Vérifier que (Q) est tangent à (S) , puis déterminer le point de contact.
- 5) a) Vérifier que $(P) \perp (Q)$.
b) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) , intersection de (P) et de (Q) .
- 6) a) Vérifier que le point $A(1; 1; 3)$ appartient à la sphère (S) .
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q') tangent à la sphère (S) au point A .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 4 — Sphère et droites

★★★★★

- 1) On considère la sphère (S) de centre $\Omega(1; 0; -1)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$. Donner une équation cartésienne de (S) .
- 2) On considère les droites (D_1) , (D_2) et (D_3) de représentations paramétriques respectives

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Calculer les distances $d(\Omega; (D_1))$, $d(\Omega; (D_2))$ et $d(\Omega; (D_3))$, puis étudier les positions relatives de (S) et des droites (D_1) , (D_2) et (D_3) .

[► Afficher / Masquer la solution](#)

Exercice 5 — Produit vectoriel, plan et sphère

★★★★★

On considère les points $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$ et $C(0; 2; 1)$.

- 1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$.
b) En déduire que $x + y + z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .
- 2) On considère la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 2z + 5 = 0$. Montrer que le centre de (S) est le point $\Omega(3; 2; 1)$ et que son rayon est $R = 3$.
- 3) a) Vérifier que le système $x = 3 + t$, $y = 2 + t$, $z = 1 + t$ ($t \in \mathbb{R}$) est une représentation paramétrique de la droite (D) passant par Ω et orthogonale au plan (ABC) .
b) Déterminer les coordonnées du point H , intersection de la droite (D) et du plan (ABC) .
- 4) Vérifier que $d(\Omega; (ABC)) = \sqrt{3}$, puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

[► Afficher / Masquer la solution](#)

Exercice 6 — Sphère, plan et droite

★★★★★

On considère la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$ et le plan (P) d'équation $x + y + z - 5 = 0$.

- 1) a) Montrer que le centre de (S) est le point $\Omega(1; 2; -1)$ et que son rayon est $R = 3$.
b) Calculer $d(\Omega; (P))$, puis en déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) .
c) Déterminer le centre et le rayon du cercle (C) .
- 2) On considère la droite (D) passant par le point $A(2; 0; 1)$ et orthogonale au plan (P) , et le vecteur $\vec{u}(1; 1; 1)$.
a) Montrer que $\vec{u}$ dirige (D) et que $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = -4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.
b) En déduire $d(\Omega; (D))$, puis montrer que la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points.
c) Déterminer les coordonnées de ces deux points d'intersection.

[► Afficher / Masquer la solution](#)

Exercice 7 — Plans sécants et sphère

★★★★★

On considère les points $A(1; 0; 1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(0; 2; 2)$, $I(1; 1; 1)$, $J(3; 1; 1)$ et $K(1; 3; 1)$.

- 1) a) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
- 2) On considère les plans (Q) et (Q') d'équations respectives $x + y - 2z + 1 = 0$ et $x - y + z = 0$.
a) Montrer que (Q) et (Q') sont sécants.
b) Donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (Δ) .
- 3) Écrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre I et de rayon 2.
- 4) Déterminer l'intersection de la sphère (S) et de la droite (JK) .

[► Afficher / Masquer la solution](#)

Exercice 8 — Plan, distance et plan médiateur

★★★★★

On considère les points $A(1; 2; 0)$ et $B(2; 0; 1)$, et le vecteur $\vec{n} = 2\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$.

- 1) Montrer que les points O , A et B ne sont pas alignés.
- 2) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
- 3) En déduire une équation cartésienne du plan (OAB) .
- 4) On considère le plan (P) d'équation $x + 2y + 2z - 5 = 0$.
 - a) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire à (P) .
 - b) Déterminer les points M de (Δ) tels que $d(M; (P)) = 1$.
- 5) a) Donner une équation cartésienne du plan médiateur (Q) du segment $[AB]$.
b) Montrer que les plans (Q) et (P) sont sécants.

[► Afficher / Masquer la solution](#)

Exercice 9 — Distances et sphère tangente

★★★★★

On considère les points $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(0; 1; 1)$ et $I(2; 1; 3)$, et le plan (P) d'équation $x + y - z = 0$.

- 1) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, puis en déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés.
- 2) Montrer que $x + y + 2z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .
- 3) Vérifier que les plans (P) et (ABC) sont perpendiculaires.
- 4) Donner une représentation paramétrique de la droite (D) , intersection des plans (P) et (ABC) .
- 5) On considère un point M de (D) . Déterminer M pour que la distance IM soit minimale, puis en déduire $d(I; (D))$.
- 6) Calculer $d(I; (ABC))$.
- 7) On considère l'ensemble (S) des points $M(x; y; z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 8 = 0$.
 - a) Montrer que (S) est une sphère de centre I , tangente au plan (ABC) .
 - b) Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à (S) , parallèle à (ABC) et distinct de (ABC) .

[► Afficher / Masquer la solution](#)

Exercice 10 — Synthèse : famille de sphères

★★★★★

On considère les points $A(1; 1; 0)$, $B(0; 2; 1)$ et $C(2; 0; 1)$, et la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 2 = 0$.

- 1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, puis en déduire l'aire du triangle ABC .
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
- 2) Déterminer l'intersection de la sphère (S) et du plan (ABC) .
- 3) Calculer la distance $d(B; (AC))$.
- 4) On considère le plan (P) d'équation $x - z - 1 = 0$.
 - a) Montrer que les plans (P) et (ABC) sont sécants suivant une droite (D) dont on déterminera un vecteur directeur.
 - b) Montrer que le point C appartient à (P) et à (ABC) .
 - c) En déduire une représentation paramétrique de la droite (D) .
- 5) On considère un réel m et l'ensemble (S_m) des points $M(x; y; z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my - 2z + m^2 = 0$.
 - a) Montrer que (S_m) est une sphère de centre $\Omega_m(m; m; 1)$ et de rayon $R_m = \sqrt{m^2 + 1}$.
 - b) Déterminer l'ensemble décrit par le point Ω_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$.
 - c) Discuter, selon les valeurs de m , la position relative de (S_m) et du plan (P) .

[► Afficher / Masquer la solution](#)