

Série d'exercices n° 10

Calcul intégral

2BAC PC SVT · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1 — Calcul d'intégrales à l'aide de primitives

★★★★★

Calculer les intégrales suivantes (chaque fonction intégrée est continue sur l'intervalle d'intégration) :

$$I_1 = \int_{-1}^2 (x^3 - 3x^2 + 2) dx ; \quad I_2 = \int_0^1 (e^{-x} + 3x^2) dx ; \quad I_3 = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} ; \quad I_4 = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx ;$$

$$I_5 = \int_2^3 \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} dx ; \quad I_6 = \int_0^1 \frac{2x}{(x^2+3)^2} dx ; \quad I_7 = \int_{-2}^1 x|x| dx ; \quad I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x dx ;$$

$$I_9 = \int_{-1}^0 (x+1)(x^2+2x)^2 dx ; \quad I_{10} = \int_0^3 x\sqrt{x+1} dx ; \quad I_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^4 x dx ; \quad I_{12} = \int_0^2 \frac{t}{\sqrt{t^2+5}} dt ;$$

$$I_{13} = \int_0^2 |3t-2| dt ; \quad I_{14} = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx ; \quad I_{15} = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} ; \quad I_{16} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx.$$

Indication pour I_{10} : écrire $x = (x+1) - 1$.

Exercice 1 (suite)[► Afficher / Masquer la solution](#)

Exercice 2 — *Intégration par parties*

À l'aide de la méthode d'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^2 \ln x \, dx ; \quad I_2 = \int_1^e (2x + 1) \ln x \, dx ; \quad I_3 = \int_0^1 x e^{-x} \, dx ; \quad I_4 = \int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \, dx ;$$

$$I_5 = \int_1^e x^3 \ln x \, dx ; \quad I_6 = \int_0^{\frac{1}{2}} x e^{2x} \, dx ; \quad I_7 = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} \, dx ; \quad I_8 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx ;$$

$$I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx ; \quad I_{10} = \int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx ; \quad I_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(2x) \, dx ; \quad I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx ;$$

$$I_{13} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx ; \quad I_{14} = \int_0^{\sqrt{5}} x^3 \sqrt{x^2 + 4} \, dx.$$

► **Afficher / Masquer la solution**

Exercice 3 — Intégrales trigonométriques



On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^4 x}$.

1. Calculer I .
2. Soit f la fonction définie sur $[0; \frac{\pi}{3}]$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.
 - a. Montrer que, pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{3}]$, $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.
 - b. En déduire une relation entre I et J .
 - c. En déduire la valeur de J .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 4 — Trois intégrales liées



On considère les intégrales

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}} ; \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 3}} dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 3} dx.$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 3})$.
 - a. Montrer que, pour tout $x \in [0; 1]$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$.
 - b. En déduire la valeur de I .
2. a. Vérifier que $J + 3I = K$.
 - b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $K = 2 - J$.
 - c. En déduire les valeurs de J et de K .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 5 — Encadrement d'une intégrale



Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$.

1. Étudier les variations de f sur $] -1; +\infty[$.
2. En déduire que, pour tout $x \in [0; 1]$, $1 \leq f(x) \leq \frac{e^2}{2}$.
3. a. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $1 - x + \frac{x^2}{1+x} = \frac{1}{1+x}$.
b. En déduire que $\int_0^1 (1-x)e^{2x} dx + \int_0^1 x^2 f(x) dx = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+x} dx$.
4. Calculer $\int_0^1 (1-x)e^{2x} dx$.
5. Montrer que $\frac{1}{3} \leq \int_0^1 x^2 f(x) dx \leq \frac{e^2}{6}$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 6 — Aire et limite

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 3)e^{-x}$, et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1. Soit λ un réel strictement positif. Déterminer, en cm^2 , l'aire $S(\lambda)$ du domaine plan limité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.
2. Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda)$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 7 — Aire entre une courbe et son asymptote

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + 1 + \frac{2 - \ln x}{\sqrt{x}}$, et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1. a. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.
b. Étudier la position relative de (C_f) et (D) sur $]0; +\infty[$.
2. Soit λ un réel tel que $\lambda \geq e^2$. Déterminer l'aire $S(\lambda)$, en cm^2 , du domaine plan limité par (C_f) , la droite (D) et les droites d'équations $x = e^2$ et $x = \lambda$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 8 — *Décomposition d'une fraction rationnelle*

★★★★★

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x-1}{(x+1)^3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
2. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)^3}$.
3. Calculer $\int_0^2 f(x) dx$.

[► Afficher / Masquer la solution](#)**Exercice 9** — *Intégrale dépendant d'un paramètre*

★★★★★

Soit a un réel tel que $a \geq 1$. On pose $I(a) = \int_1^a \frac{\ln x}{x^3} dx$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(a) = \frac{1}{4} - \frac{2 \ln a + 1}{4a^2}$.
2. En déduire $\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a)$.
3. On pose $J(a) = \int_1^a \frac{\ln x}{x^3 + 1} dx$. Justifier l'existence de $J(a)$ et montrer que $J(a) \geq 0$.
4. Vérifier que, pour tout $x \in [1; +\infty[$, $x^3 \leq x^3 + 1 \leq 2x^3$, puis montrer que $\frac{1}{2}I(a) \leq J(a) \leq I(a)$.

[► Afficher / Masquer la solution](#)

Exercice 10 — Décomposition, parties et linéarisation

★★★★★

1. a. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{(e^x + 2)^2} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{e^x}{e^x + 2} - \frac{2e^x}{(e^x + 2)^2} \right)$.
b. En déduire la valeur de $J = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{(e^x + 2)^2}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $K = \int_0^{\ln 2} \frac{xe^x}{(e^x + 2)^3} dx$.
3. a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^3 x = \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin(3x))$.
b. Calculer l'intégrale $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 11 — Deux calculs directs

★★★★★

1. Calculer l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2 \sin(2x) \right) dx$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(\frac{x}{x^2 + 3} \right)' = \frac{3 - x^2}{(x^2 + 3)^2}$, puis calculer $\int_0^1 \frac{3 - x^2}{(x^2 + 3)^2} dx$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 12 — Puissances de sinus et cosinus

★★★★★

1. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x \sin^3 x = \sin x \cos^2 x - \sin x \cos^4 x$.
2. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin^3 x \, dx$.

[► Afficher / Masquer la solution](#)**Exercice 13** — Logarithme et intégration par parties

★★★★★

1. Vérifier que, pour tout $x \in [0; 1]$, $\frac{x^3 + 2x}{x + 1} = x^2 - x + 3 - \frac{3}{x + 1}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_0^1 (3x^2 + 2) \ln(x + 1) \, dx$.

[► Afficher / Masquer la solution](#)**Exercice 14** — Aire d'un domaine

★★★★★

Soit f la fonction définie sur $]0; e^{-2}[\cup]e^{-2}; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x(2 + \ln x)}$, et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm.

1. Montrer que $\int_1^e \frac{dx}{x(2 + \ln x)} = \ln \frac{3}{2}$. (Remarquer que $\frac{1}{x(2 + \ln x)} = \frac{\frac{1}{x}}{2 + \ln x}$.)
2. Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

[► Afficher / Masquer la solution](#)

Exercice 15 — Aire entre une courbe et une droite

★★★★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2 - (x^2 + 2)e^x$, et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2$ cm.

1. Montrer que la fonction $H : x \mapsto (x - 1)e^x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$, puis en déduire que $\int_{-2}^0 xe^x dx = \frac{3}{e^2} - 1$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_{-2}^0 (x^2 + 2)e^x dx = 4 \left(1 - \frac{3}{e^2}\right)$.
3. Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par (C_f) , la droite (D) d'équation $y = x + 2$ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 16 — Suite définie par une intégrale

★★★★★

On pose $I_0 = \int_1^e x^2 dx$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. a. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3I_{n+1} = e^3 - (n + 1)I_n$.
b. Calculer alors I_2 .
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
4. a. En remarquant que $x^2 (\ln x)^n = x^3 \times \frac{(\ln x)^n}{x}$, montrer que, pour tout $x \in [1; e]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{(\ln x)^n}{x} \leq x^2 (\ln x)^n \leq e^3 \frac{(\ln x)^n}{x}.$$

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

► Afficher / Masquer la solution