

Série d'exercices — Chapitre 17

Produit scalaire dans l'espace

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Cadre. Dans toute la série, l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Les paramètres t, α, β décrivent $\mathbb{R}$; m désigne un réel. Difficulté : de ★ à ★★★★★.

Exercice 1 — Vecteur normal, équation d'un plan

★★★★★

On considère les points $A(1; 1; 2)$, $B(0; 1; 1)$ et le vecteur $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

1. Vérifier que les points O , A et B ne sont pas alignés.
2. Montrer de deux façons (produit scalaire, puis produit vectoriel) que $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OA}$ et à $\overrightarrow{OB}$.
3. En déduire, de deux façons, une équation cartésienne du plan (OAB) .
4. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A et orthogonale au plan (OAB) .

Exercice 2 — Droite orthogonale, droite parallèle à un plan

★★★★★

On considère $A(-1; 0; 1)$, $B(1; 2; -1)$, $C(1; -1; 2)$ et le plan $(P) : x + y - z = 0$.

1. a. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .
b. Vérifier que (AB) est orthogonale à (P) .
c. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AB) et (P) .
2. Montrer que la droite (AC) est strictement parallèle à (P) .
3. Donner une équation cartésienne du plan (Q) passant par B et parallèle à (P) .

Exercice 3 — Sphère et plans

★★★★★

Soit $(P) : 2x - 2y - 5 = 0$ et (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z + 11 = 0$.

1. Montrer que (S) est une sphère dont on déterminera le centre Ω et le rayon R .
2. Montrer que (P) coupe (S) selon un cercle (C) dont on déterminera le centre H et le rayon r .
3. Déterminer une équation cartésienne de chacun des deux plans tangents à (S) et parallèles à (P) .
4. Soit $(Q) : x + y + z + 1 = 0$. Vérifier que (Q) est tangent à (S) et déterminer le point de contact.
5. a. Vérifier que $(P) \perp (Q)$.
b. Donner une représentation paramétrique de la droite $(\Delta) = (P) \cap (Q)$.
6. a. Vérifier que $A(0; -1; -2)$ appartient à (S) .
b. Déterminer une équation cartésienne du plan (Q') tangent à (S) en A .

Exercice 4 — Sphère et droites

★★★★★

Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1; -1; 0)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$.

1. Donner une équation cartésienne de (S) .
2. On considère $(D_1) : x = 2, y = 2 + 4t, z = 5 + 4t$; $(D_2) : x = 2 - t, y = -2 + t, z = 1 - t$; $(D_3) : x = -2 + 6t, y = 4t, z = t$ ($t \in \mathbb{R}$). Calculer $d(\Omega; (D_1))$, $d(\Omega; (D_2))$, $d(\Omega; (D_3))$ puis étudier les positions relatives de (S) et de chacune des droites (préciser les points communs).

Exercice 5 — Sphère coupée par un plan

★★★★★

On considère $A(0; -2; -2)$, $B(1; -2; -4)$ et $C(-3; 1; -2)$.

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$.
b. En déduire que $2x + 2y + z + 6 = 0$ est une équation cartésienne de (ABC) .
2. Soit $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0$. Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(1; 0; 1)$ et de rayon $R = 5$.
3. a. Vérifier que $x = 1 + 2t, y = 2t, z = 1 + t$ ($t \in \mathbb{R}$) est une représentation paramétrique de la droite (D) passant par Ω et orthogonale à (ABC) .

- b. Déterminer les coordonnées du point H intersection de (D) et (ABC) .
4. Vérifier que $d(\Omega; (ABC)) = 3$, puis montrer que (ABC) coupe (S) selon un cercle de rayon 4 dont on précisera le centre.

Exercice 6 — *Sphère, plan et droite*

★★★★★

Soit $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$ et $(P) : y - z = 0$.

- a. Montrer que (S) a pour centre $\Omega(1; 1; 1)$ et pour rayon $R = 2$.
b. Calculer $d(\Omega; (P))$ et en déduire que (P) coupe (S) selon un cercle (C) .
c. Déterminer le centre et le rayon de (C) .
- Soit (D) la droite passant par $A(1; -2; 2)$ et orthogonale à (P) .
a. Montrer que $\vec{u}(0; 1; -1)$ dirige (D) .
b. Montrer que $\vec{\Omega A} \wedge \vec{u} = 2\vec{i}$; en déduire que (D) coupe (S) en deux points.
c. Déterminer les coordonnées de ces deux points.

Exercice 7 — *Produit vectoriel, intersection de plans, sphère*

★★★★★

On donne $A(-1; 2; 1)$, $B(1; -6; -1)$, $C(2; 2; 2)$ et $I(0; 1; -1)$.

- a. Calculer $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
b. En déduire une équation du plan (ABC) .
- Soit $(Q) : x + y - 3z + 2 = 0$ et (Q') le plan $(O; \vec{i}; \vec{k})$.
a. Montrer que (Q) et (Q') sont sécants. (Que remarque-t-on pour (Q) ?)
b. Donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (Δ) .
- Écrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre I et de rayon 2.
- Soient $J(-2; 0; 0)$ et $K(1; 0; 1)$. Déterminer l'intersection de (S) et de la droite (JK) .

Exercice 8 — *Plan, distance et plan médiateur*

★★★★★

On considère $A(2; 1; 1)$, $B(1; 0; 1)$ et $\vec{n} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.

- Montrer que O , A et B ne sont pas alignés.
- Montrer que $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{OA}$ et à $\vec{OB}$.
- En déduire une équation du plan (OAB) .
- Soit $(P) : x + y + z = 0$.
a. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et orthogonale à (P) .
b. Déterminer les points M de (Δ) tels que $d(M; (P)) = 1$.
- a. Donner une équation cartésienne du plan médiateur (Q) du segment $[AB]$.
b. Montrer que (Q) et (P) sont sécants.

Exercice 9 — *Distance à une droite, sphère tangente*

★★★★★

On considère $A(1; 1; 0)$, $B(1; -1; 1)$, $C(0; 1; 1)$ et le plan $(P) : x + 2y - 2z + 1 = 0$.

- Calculer $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ et en déduire que A , B , C ne sont pas alignés.
- Montrer que $(ABC) : 2x + y + 2z - 3 = 0$.
- Vérifier que $(P) \perp (ABC)$.
- Donner une représentation paramétrique de la droite $(D) = (P) \cap (ABC)$.
- Soit $I(2; 1; 1)$ et M un point de (D) . Déterminer M pour que IM soit minimale et en déduire $d(I; (D))$.
- Calculer $d(I; (ABC))$.
- Soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + \frac{38}{9} = 0$.
a. Montrer que (S) est une sphère de centre I , tangente au plan (ABC) .
b. Déterminer une équation du plan (Q) tangent à (S) et strictement parallèle à (ABC) .

Exercice 10 — Famille de sphères

★★★★★

On considère $A(-1; 3; 0)$, $B(-3; 0; -1)$, $C(1; 5; -1)$ et $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + z - 10 = 0$.

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle ABC .
b. Donner une équation du plan (ABC) .
2. Déterminer $(S) \cap (ABC)$.
3. Calculer la distance $d(B; (AC))$.
4. Soit $(P) : 2x - 2z - 17 = 0$.
 - a. Montrer que (P) et (ABC) sont sécants selon une droite (D) dont on donnera un vecteur directeur.
 - b. Montrer que $E\left(0; 0; -\frac{17}{2}\right)$ appartient à (P) et à (ABC) .
 - c. En déduire une représentation paramétrique de (D) .
5. Pour $m \in \mathbb{R}$, on note (S_m) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my - 2(m+3)z + 5m - 10 = 0$.
 - a. Montrer que (S_m) est une sphère de centre $\Omega_m(m; m; m+3)$ et de rayon $R_m = \sqrt{3m^2 + m + 19}$.
 - b. Quel ensemble décrit Ω_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$?
 - c. Discuter, selon m , la position relative de (S_m) et (P) .