

Série d'exercices — Chapitre 16

Analytique de l'espace

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Cadre. Dans toute la série, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Les paramètres $t, k, \alpha, \beta, \alpha', \beta'$ décrivent $\mathbb{R}$; m désigne un réel. Toute réponse doit être justifiée. Difficulté : de ★ à ★★★★★.

Exercice 1 — Coordonnées

★★★★★

On considère les points $A(3; -4; 0)$, $B(-5; 2; 4)$ et $C(1; 4; -1)$.

- Placer les points A, B, C dans le repère.
- Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
- Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.
- Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 2 — Colinéarité — alignement

★★★★★

- Étudier la colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chacun des cas :
 - $\vec{u}(6; -1; -3)$ et $\vec{v}(-2; \frac{1}{3}; 1)$;
 - $\vec{u}(2; -1; \frac{1}{2})$ et $\vec{v}(-1; \frac{1}{2}; 2)$.
- Étudier l'alignement des points A, B, C dans chacun des cas :
 - $A(1; 2; 3)$, $B(2; 0; -1)$, $C(\frac{3}{2}; 1; 1)$;
 - $A(-1; 1; 1)$, $B(0; -2; 3)$, $C(1; 2; -1)$;
 - $A(1; 1; 0)$, $B(2; 0; -1)$, $C(3; -1; m)$ (discuter selon m).

Exercice 3 — Coplanarité

★★★★★

- Étudier la coplanarité de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans chacun des cas :
 - $\vec{u}(2; 1; 0)$, $\vec{v}(1; 0; -1)$, $\vec{w}(0; 1; 2)$;
 - $\vec{u}(1; 0; 1)$, $\vec{v}(2; 4; 1)$, $\vec{w}(2; 1; -1)$.
- Étudier la coplanarité des points A, B, C, D dans chacun des cas :
 - $A(1; 1; 1)$, $B(1; -3; 4)$, $C(2; 5; 1)$, $D(-1; 2; 3)$;
 - $A(2; -4; -1)$, $B(-3; -1; 1)$, $C(0; -2; -1)$, $D(1; -2; 2)$;
 - $A(m; 1; -1)$, $B(-3; -1; 0)$, $C(3; -3; 1)$, $D(0; 1; 2)$ (discuter selon m).

Exercice 4 — Représentation paramétrique et équations cartésiennes d'une droite

★★★★★

Donner une représentation paramétrique et un système de deux équations cartésiennes de la droite (D) dans chacun des cas :

- (D) passe par $A(2; 3; 1)$ et est dirigée par $\vec{v}(1; 2; -1)$;
- (D) passe par $A(1; -1; 0)$ et $B(1; 2; 3)$;
- (D) passe par $A(2; 3; 1)$ et est parallèle à $(\Delta) : x = -2 + 3t, y = 2t, z = 1$ ($t \in \mathbb{R}$).

Exercice 5 — Positions relatives de deux droites

★★★★★

Étudier la position relative des droites (D) et (D') (et préciser leur intersection éventuelle) :

- $(D) : x = 1 - t, y = 2 + t, z = 3t$ ($t \in \mathbb{R}$) et $(D') : x = -1 + 2k, y = -k, z = 3 + k$ ($k \in \mathbb{R}$);
- $(D) : \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{2} = z - 1$ et $(D') : \frac{x+2}{4} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{2}$;
- $(D) : x = 1 - t, y = 2, z = 3 + 2t$ ($t \in \mathbb{R}$) et $(D') : x - y + 3 = 0$ et $21x + 14y - z = 0$;
- $(D) : x - y = 0$ et $3x - z - 2 = 0$; $(D') : x - z + 1 = 0$ et $y + 1 = 0$;
- $(D) : \frac{x+1}{3} = \frac{z+3}{2}$ et $y = -1$; $(D') : \frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z+2}{3}$.

Exercice 6 — Équation cartésienne et représentation paramétrique d'un plan

★★★★★

- Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
 - $A(-1; 3; 4)$, $\vec{u}(-1; 0; 1)$, $\vec{v}(3; -4; 2)$;
 - $A(0; 2; 1)$, $\vec{u} = \vec{i}$, $\vec{v} = \vec{k}$;
 - $A(0; -1; 0)$, $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.
- Déterminer une équation cartésienne et une représentation paramétrique du plan (ABC) :
 - $A(0; 2; 1)$, $B(1; -1; 1)$, $C(-3; 1; 0)$;
 - $A(0; 0; 1)$, $B(-1; \frac{1}{2}; 0)$, $C(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2})$.
- Déterminer une équation cartésienne du plan contenant les droites $(D) : x = 1 + 3t, y = 2 + 2t, z = -3 - 2t$ ($t \in \mathbb{R}$) et $(D') : x = -2 + 3\beta, y = -1 + 2\beta, z = 3 - 2\beta$ ($\beta \in \mathbb{R}$), après avoir justifié qu'il existe.
- Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(2; 2; 1)$ et contenant la droite $x = 1 + 2t, y = 2 - 3t, z = -3 + 2t$ ($t \in \mathbb{R}$).

Exercice 7 — Position relative d'une droite et d'un plan

★★★★★

- Étudier la position relative de (D) et (P) :
 - $(D) : x = 1 + 3t, y = -1 + t, z = 2 + t$ ($t \in \mathbb{R}$) et $(P) : x = 3 + \alpha + 2\beta, y = -1 + 2\alpha + \beta, z = 2 + 3\alpha + \beta$ ($(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$) ;
 - $(D) : x - y + 1 = 0$ et $2x - z + 1 = 0$; $(P) : 3x + y - z + 5 = 0$;
 - $(D) : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{4}$ et $(P) : x = 3 + \alpha + \beta, y = -1 + \alpha - 2\beta, z = 1 + \alpha + 3\beta$ ($(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$).
- Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par $A(-1; 0; 3)$ et contenant la droite $(D) : \frac{x+1}{3} = y - 2 = \frac{z-1}{3}$.
 - Étudier l'intersection de (P) et de $(\Delta) : x = 1 - 2t, y = 3, z = 4 + t$ ($t \in \mathbb{R}$).

Exercice 8 — Positions relatives de deux plans

★★★★★

Étudier la position relative des plans (P) et (Q) ; s'ils sont sécants, donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

- $(P) : 2x - y + z + 1 = 0$ et $(Q) : x + 2y + z = 0$;
- $(P) : 4x - 2y + 2z - 1 = 0$ et $(Q) : -2x + y - z + 1 = 0$;
- $(P) : \sqrt{2}x - \sqrt{3}y + z - 2\sqrt{2} = 0$ et $(Q) : -2x + \sqrt{6}y - \sqrt{2}z + 4 = 0$;
- $(P) : x + y - z + 1 = 0$ et $(Q) : 3x - y - 2z - 2 = 0$;
- $(P) : -2x + 2y + z + 1 = 0$ et $(Q) : x = 1 + 2\alpha - \beta, y = -2 - \alpha, z = \alpha + \beta$ ($(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$) ;
- $(P) : x = 5 + 5\beta', y = 3 + \alpha' + \beta', z = 2 + \alpha' + 3\beta'$ et $(Q) : x = 1 + 2\alpha + \beta, y = 2 + \alpha + \beta, z = -1 - \beta$.