

Série d'exercices — Chapitre 15

Vecteurs de l'espace

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Cadre. Toute réponse doit être justifiée. Pour un cube ou un pavé $ABCDEFGH$, $ABCD$ et $EFGH$ sont des faces opposées et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. Pour un prisme $ABCDEF$, ABC et DEF sont les bases et $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$ les arêtes latérales. Difficulté : de ★ à ★★★★★.

Exercice 1 — Calcul vectoriel dans un prisme

★★★★★

Soit $ABCDEF$ un prisme à base triangulaire et I le milieu de $[DF]$.

1. Simplifier $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.
2. Simplifier $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}$.
3. Soit G le point défini par $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$. Montrer que I est le milieu de $[GE]$.

Exercice 2 — Coplanarité dans un pavé

★★★★★

Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit et I le milieu de $[BF]$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{HE}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.

Exercice 3 — Construction de points, alignement

★★★★★

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

1. Identifier les points M , N et R définis par : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CH}$; $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BF}$; $\overrightarrow{HR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB})$.
2. Soient P et Q les points définis par $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, et soient I et K les milieux respectifs de $[AE]$ et $[PQ]$.
 - a. Montrer que $\overrightarrow{QP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$.
 - b. Soit J le milieu de $[DG]$. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
 - c. En déduire que I , J et K sont alignés.

Exercice 4 — Point défini par une relation

★★★★★

Soit $ABCDEFGH$ un cube, I le milieu de $[HF]$ et M le point tel que $2\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{MA}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$. Que peut-on dire des points E , M , C ?
3. Soient J et K les milieux respectifs de $[EF]$ et $[BC]$. Montrer que $\overrightarrow{JK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$.

Exercice 5 — Droites définies par un point et un vecteur

★★★★★

Soit $ABCDEFGH$ un cube ; I , J , O sont les milieux respectifs de $[AE]$, $[GH]$ et $[CH]$.

1. a. Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AO}$.
b. En déduire que la droite (IJ) est parallèle au plan (ACH) .
2. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$.
3. Identifier les droites $D(O; \overrightarrow{IJ})$ et $D(G; \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{OF})$.

Exercice 6 — Plans définis par un point et deux vecteurs

★★★★★

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

1. Identifier le plan passant par G et dirigé par $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{GH}$.
2. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AE}$, avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 7 — Coplanarité

★★★★★

Soit $ABCDEFGH$ un cube ; I et J sont définis par $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$.
3. En déduire que $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont coplanaires.

Exercice 8 — Quatre points coplanaires dans un tétraèdre

★★★★★

Soit $ABCD$ un tétraèdre et I, J, K, L définis par : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.

1. Faire une figure.
2. a. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.
b. En déduire que I, J, K, L sont coplanaires et préciser la nature de $IJKL$.
3. Montrer que (BD) est parallèle au plan (IJK) .

Exercice 9 — Intersection de deux droites

★★★★★

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On définit E, F, G par $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AD}$.

1. Justifier que E appartient au plan (ABC) .
2. Les points E, C et D sont-ils alignés ? Justifier.
3. Justifier que les droites (FC) et (AD) sont coplanaires.
4. Exprimer $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
5. En déduire que G est le point d'intersection des droites (AD) et (FC) .

Exercice 10 — Plans parallèles dans une pyramide

★★★★★

Soit $PABCD$ une pyramide de sommet P dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. On définit M, N, S par $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires.
2. En déduire que la droite (MN) est parallèle au plan (PAD) .
3. Montrer que les plans (MNS) et (PAD) sont parallèles.