

Série d'exercices — Chapitre 14

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ 1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Cadre. Toute réponse doit être justifiée. On écrit « a divise b » en toutes lettres ; « D.E. » abrège « division euclidienne ». Pour chaque raisonnement, on annoncera son type (direct, par disjonction de cas, par récurrence, par contraposée, par l'absurde). Difficulté : de ★ à ★★★★★.

Exercice 1 — *Diviseurs*

★★★★★

- Déterminer et dénombrer les diviseurs positifs de 156.
- Déterminer tous les diviseurs de -8 dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 2 — *Combinaisons linéaires*

★★★★★

- Soient $a, b, c, x, y \in \mathbb{Z}$. Montrer que :
 - si a divise $2b + c$ et a divise $b + c$, alors a divise c ;
 - si a divise $2b + 3c$ et a divise $b + c$, alors a divise c ;
 - si a divise $x - y$ et a divise $b - c$, alors a divise $xb - cy$.
- Soient $a, n \in \mathbb{Z}$ tels que a divise $12n + 1$ et a divise $-2n + 3$. Montrer que a divise 19.
- Soient $d, n \in \mathbb{Z}$ tels que d divise $n^2 + 3$ et d divise $2n - 1$. Montrer que d divise 13.

Exercice 3 — *Combinaisons linéaires*

★★★★★

Soient $a, x \in \mathbb{Z}$. Montrer que si a divise $5x + 7$ et a divise $2x - 3$, alors a divise 29.

Exercice 4 — *Récurrence et divisibilité*

★★★★★

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 divise $4^n - 1$.

Exercice 5 — *Recherche d'entiers*

★★★★★

Déterminer les entiers relatifs n , $n \neq 1$, tels que $n - 1$ divise $2n + 7$.

Exercice 6 — *Fraction entière*

★★★★★

Déterminer les entiers relatifs n , $n \neq -4$, tels que $\frac{n^3 + 8}{n + 4}$ soit un entier relatif.

Exercice 7 — *Équations dans $\mathbb{N}^2$*

★★★★★

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes, d'inconnue $(x; y)$:

- $x^2 - y^2 = 32$ avec $x > y$;
- $2xy + 2x + y = 99$.

Exercice 8 — *Restes modulo 9*

★★★★★

Déterminer le reste de la D.E. par 9 de chacun des nombres 23451^{100} et $100^{23451} + 23451^{100}$.

Exercice 9 — *Puissances de 5 modulo 17*

★★★★★

- Montrer que $5^8 \equiv -1 [17]$.
- Déterminer les restes de la D.E. par 17 des nombres 5^{16} et 5^{500} .

Exercice 10 — *Opérations sur les restes*

★★★★★

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que le reste de la D.E. de a par 19 est 17 et celui de b par 19 est 15. Déterminer le reste de la D.E. par 19 de :

- $a + b$;

2. $a^2 + b^2$;
3. $2a - 5b$.

Exercice 11 — *Restes*

★★★★★

Déterminer le reste de la D.E. de 3^{2007} par 2, puis par 13.

Exercice 12 — *Restes*

★★★★★

Déterminer le reste de la D.E. de 73^{2019} par 7.

Exercice 13 — *Restes*

★★★★★

Déterminer le reste de la D.E. de $19^{52} \times 23^{41}$ par 7.

Exercice 14 — *Restes*

★★★★★

Déterminer le reste de la D.E. par 5 du nombre $22^{33} + 33^{22}$.

Exercice 15 — *Discussion suivant n*

★★★★★

1. Déterminer, suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la D.E. de 3^n par 7.
2. En déduire le reste de la D.E. de 2019^{2019} par 7.

Exercice 16 — *Équations dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$*

★★★★★

Résoudre dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ les équations suivantes, d'inconnue x :

1. $\bar{2}x = \bar{3}$;
2. $x^2 + \bar{3}x = \bar{0}$;
3. $\bar{2013}x^3 + \bar{2}x = \bar{k}$, en discutant suivant $\bar{k} \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 17 — *Équation dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$*

★★★★★

Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ l'équation $x + \bar{3}y = \bar{1}$, d'inconnue $(x; y)$.

Exercice 18 — *Système dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$*

★★★★★

Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ le système
$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}.$$

Exercice 19 — *Modulo 10*

★★★★★

1. Déterminer, suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la D.E. de 3^n par 10.
2. En déduire le chiffre des unités du nombre 2029^{2020} .
3. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $3^n + 5n + 2 \equiv 0 [10]$.

Exercice 20 — *Chiffre des unités*

★★★★★

Déterminer le chiffre des unités du nombre 24537^{2018} .

Exercice 21 — *Congruence à deux périodes*

★★★★★

Déterminer tous les entiers naturels n tels que $2^n \equiv n^2 [9]$.

Exercice 22 — *Congruence à deux périodes*

★★★★★

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $3^n + 5n + 1 \equiv 0 [8]$.

Exercice 23 — *Restes*

★★★★★

Déterminer le reste de la D.E. de $22^{33} \times 33^{22}$ par 5.

Exercice 24 — *Restes*

★★★★★

Déterminer le reste de la D.E. de 3^{2019} par 2 et par 13.

Exercice 25 — *Récurrence*

★★★★★

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{2n} + 6n - 1$ est divisible par 9.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $4^n \equiv 3n + 1 [9]$.

Exercice 26 — *Restes modulo 11*

★★★★★

Déterminer le reste de la D.E. par 11 du nombre $1653^{351} + 43^{137}$.

Exercice 27 — *Somme de puissances*

★★★★★

Montrer que 7 divise $1^{2019} + 2^{2019} + 3^{2019} + 4^{2019} + 5^{2019} + 6^{2019}$.

Exercice 28 — *Entiers consécutifs*

★★★★★

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\text{PGCD}(n; n+1) = 1$.

Exercice 29 — *Suite et divisibilité*

★★★★★

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = 4^n - 3n - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 4U_n + 9n$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 9 divise $4^n - 3n - 1$.

Exercice 30 — *Nombre non premier*

★★★★★

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = n^4 - n^2 + 16$.

1. Montrer que $n^2 + 3n + 4$ et $n^2 - 3n + 4$ sont des entiers naturels pairs, et que $\alpha_n = (n^2 + 3n + 4)(n^2 - 3n + 4)$.
2. En déduire que α_n n'est pas premier.

Exercice 31 — *PGCD et fraction*

★★★★★

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $A = n^2 + 3$ et $B = n + 2$.

1. Montrer que $\text{PGCD}(A; B) = \text{PGCD}(n+2; 7)$.
2. Déterminer l'entier naturel n tel que $\frac{n^2 + 3}{n + 2} \in \mathbb{N}$.

Exercice 32 — *PGCD*

★★★★★

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = (25^n - 1)(36^n - 1)$ et $b_n = (5^n - 1)(6^n - 1)$. Calculer $\text{PGCD}(a_n; b_n)$.

Exercice 33 — *Équations dans $\mathbb{N}^2$*

★★★★★

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes :

1. $x^2 - y^2 = 45$ avec $x > y$;
2. $xy + 2x + 3y = 24$.

Exercice 34 — *Recherche d'entiers*

★★★★★

Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -3$, tels que $n+3$ divise $2n+13$.

Exercice 35 — *Fraction entière*

★★★★★

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -4$, tels que $\frac{3n+8}{n+4}$ soit un entier relatif.

Exercice 36 — *PGCD, PPCM*

★★★★★

Déterminer $d = \text{PGCD}(-8316; 1080)$ et $m = \text{PPCM}(8316; 1980)$.

Exercice 37 — *PGCD et PPCM*

★★★★★

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\text{PGCD}(a; b) = 2$ et $ab = 12$. Déterminer $\text{PPCM}(a; b)$, puis les couples $(a; b)$ possibles.

Exercice 38 — *Quotients successifs*

★★★★★

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si q est le quotient de la D.E. de n par a et q' celui de la D.E. de q par b , alors q' est aussi le quotient de la D.E. de n par ab .

Exercice 39 — *Restes*

★★★★★

Déterminer le reste de la D.E. de $19^{41} \times 23^{52}$ par 7.

Exercice 40 — *Congruences*

★★★★★

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)^{2019} - 1 \equiv 0 [n]$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^{2n+2} \equiv 1 [15]$.

Exercice 41 — *Équation dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$*

★★★★★

Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - x - \bar{2} = \bar{0}$.

Exercice 42 — *PGCD*

★★★★★

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, avec $b \neq 0$, tels que $a = bc + d$.

1. Montrer que $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; d)$.
2. En déduire que $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; a - bc)$.

Exercice 43 — *PGCD*

★★★★★

Soit $a \in \mathbb{N}$. On considère $A = 35a + 57$ et $B = 45a + 76$. Montrer que $\text{PGCD}(A; B) = 1$ ou $\text{PGCD}(A; B) = 19$.

Exercice 44 — *PGCD avec paramètre*

★★★★★

1. Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$, $a = 9x + 4y$ et $b = 2x + y$. Montrer que $\text{PGCD}(x; y) = \text{PGCD}(a; b)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$; on pose $a = n^2 + 5n + 13$ et $b = n + 3$.
 - a. Montrer que $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; 7)$.
 - b. En déduire les valeurs possibles de $\text{PGCD}(a; b)$.
 - c. Montrer que $n \equiv 4 [7] \iff \text{PGCD}(a; b) = 7$.
 - d. En déduire les valeurs de n telles que $\text{PGCD}(a; b) = 1$.

Exercice 45 — *PGCD avec paramètre*

★★★★★

Soit $n \in \mathbb{N}$; on pose $d_n = \text{PGCD}(2n + 8; 3n + 15)$.

1. Montrer que d_n divise 6.
2. Déterminer les entiers naturels n tels que $d_n = 6$.

Exercice 46 — *PGCD de nombres de Mersenne*

★★★★★

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ avec $a \geq 3$ et a impair. On pose $d = \text{PGCD}(2^a - 1; 2^b + 1)$.

1. Montrer que $2^{ab} \equiv 1 [d]$.
2. Montrer que $2^{ab} \equiv -1 [d]$.
3. En déduire que $d \in \{1; 2\}$.
4. Montrer que $d = 1$.

Exercice 47 — *Tour de puissances*

★★★★★

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{4^{n+1}} + 5 \equiv 0 [21]$.

Exercice 48 — *Quotient et reste liés*

★★★★★

Déterminer les entiers naturels n tels que, dans la D.E. de n par 25, le quotient soit un entier $p \in \mathbb{N}$ et le reste p^2 .

Exercice 49 — *Quotient*

★★★★★

Soient $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$. On note q le quotient de la D.E. de $a - 1$ par b . Déterminer le quotient de la D.E. de $ab^9 - 1$ par b^{10} .

Exercice 50 — *Binôme et congruences*

★★★★★

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n + 2)^{n+2} - 2^{n+2}(n + 1) \equiv 0 [n^2]$.
2. Montrer que $7^{7^{7^7}} \equiv 3 [10]$.