

Série d'exercices — Chapitre 12

Étude de fonctions

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Cadre. Toute réponse doit être justifiée. $(\mathcal{C}_f)$ désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (sauf mention contraire); « interpréter graphiquement » signifie préciser les asymptotes (verticales, horizontales, obliques) ou les branches paraboliques correspondantes. Difficulté : de ★ à ★★★★★.

Exercice 1 — Droites asymptotes

★★★★★

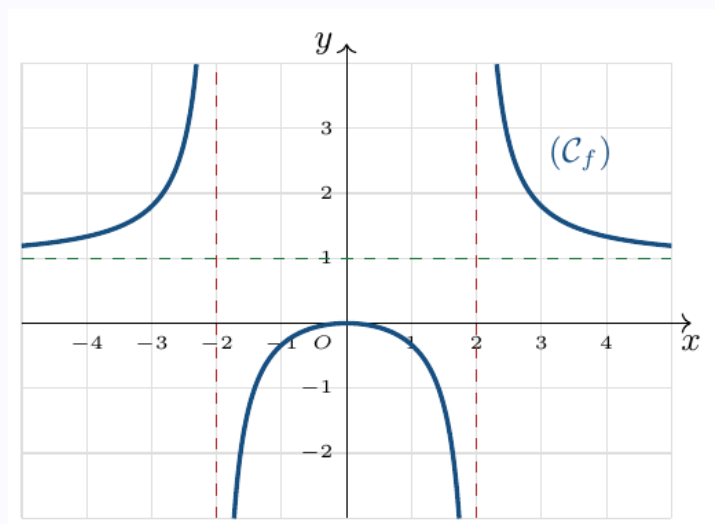
Déterminer D_f , puis calculer les limites de f aux bornes de D_f et interpréter graphiquement les résultats lorsque c'est possible, dans les cas suivants :

1. $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 9}$;
2. $f(x) = \frac{x+2}{x^2}$;
3. $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x-2}}$;
4. $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - x - 6}$;
5. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x}$;
6. $f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$.

Exercice 2 — Lecture graphique d'asymptotes

★★★★★

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-dessous est celle d'une fonction f ; les droites en pointillés sont des asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$.



1. Déterminer D_f , le domaine de définition de f .
2. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
3. Interpréter graphiquement ces résultats.

Exercice 3 — Asymptote oblique (vérification)

★★★★★

Montrer que la droite (D) est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = x - 2 + \frac{3}{x}$ et $(D) : y = x - 2$;
2. $f(x) = 3x - 1 + \frac{2}{x+3}$ et $(D) : y = 3x - 1$.

Exercice 4 — Recherche d'une asymptote oblique

★★★★★

Déterminer l'équation de l'asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = \frac{3x^2 - x + 2}{x - 1}$;
2. $f(x) = \frac{2x^2}{3 - x}$;
3. $f(x) = \frac{4x^2 - 3x + 2}{2x + 1}$;
4. $f(x) = \frac{x^3}{(x + 1)^2}$;
5. $f(x) = 1 - x + \frac{4x^2 + x + 3}{2x}$;
6. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$.

Exercice 5 — Branches paraboliques

★★★★★

Déterminer la nature de la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = -2x^3 + x^2$;
2. $f(x) = x^2 - 3x + 5$;
3. $f(x) = 3x - 2 + \frac{x\sqrt{x}}{x + 1}$;
4. $f(x) = x + \sqrt{2x + 1}$;
5. $f(x) = 4x + \sqrt{x} + \sqrt{x + 3}$;
6. $f(x) = -2x + 1 + \sqrt{x + 5}$;
7. $f(x) = 1 + \sqrt{3x + 2}$;
8. $f(x) = x\sqrt{x^2 + x + 1}$.

Exercice 6 — Étude d'une fonction rationnelle

★★★★★

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^2}{2x + 1}$.

1. Déterminer D_f .
2. a. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
b. En déduire l'équation de l'asymptote verticale de $(\mathcal{C}_f)$.
3. a. Montrer que, pour tout $x \in D_f$: $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x + 2}$.
b. Montrer par deux méthodes que la droite (D) : $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
c. Étudier les positions relatives de (D) et $(\mathcal{C}_f)$.
4. Montrer que le point $A\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
5. a. Montrer que, pour tout $x \in D_f$: $f'(x) = \frac{4x(x + 1)}{(2x + 1)^2}$.
b. Dresser le tableau de variations de f .
6. Déterminer l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.
7. Construire $(\mathcal{C}_f)$ et (T) .
8. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer graphiquement, suivant les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 7 — Étude d'une fonction rationnelle

★★★★★

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2(x - 3)}$.

1. Déterminer D_f .
2. a. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
b. En déduire l'équation de l'asymptote verticale de $(\mathcal{C}_f)$.

3. a. Montrer que, pour tout $x \in D_f : f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{2}{x-3}$.
 b. En déduire que $(D) : y = \frac{1}{2}x + 1$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $\pm\infty$.
 c. Étudier les positions relatives de (D) et $(\mathcal{C}_f)$.
4. a. Montrer que, pour tout $x \in D_f : f'(x) = \frac{(x-1)(x-5)}{2(x-3)^2}$.
 b. Dresser le tableau de variations de f .
5. Étudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$.
6. Montrer que le point $A\left(3; \frac{5}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
7. Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère.
8. Construire $(\mathcal{C}_f)$.
9. Soit (Δ) la droite d'équation $y = \frac{1}{5}x$.
 a. Vérifier que (Δ) coupe $(\mathcal{C}_f)$ aux points d'abscisses -2 et $\frac{5}{3}$.
 b. Résoudre graphiquement l'inéquation $x \in D_f : f(x) \leq \frac{1}{5}x$.

Exercice 8 — Étude d'une fonction polynomiale

★★★★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. Dresser le tableau de concavité de $(\mathcal{C}_f)$ et en déduire qu'elle admet un unique point d'inflexion Ω , que l'on déterminera.
5. Vérifier que Ω est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
6. Donner l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ en Ω .
7. Construire $(\mathcal{C}_f)$ et (T) .

Exercice 9 — Étude d'une fonction irrationnelle

★★★★★

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$.

1. Déterminer D_f .
2. Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
3. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x + 1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x - 1) = 0$.
 c. En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet deux asymptotes obliques (D) au voisinage de $-\infty$ et (D') au voisinage de $+\infty$.
4. a. Vérifier que : $(\forall x \in]-\infty; -4]) f(x) = \sqrt{-(x+4)} \times \sqrt{-(x-2)}$ et $(\forall x \in [2; +\infty[) f(x) = \sqrt{x+4} \times \sqrt{x-2}$.
 b. Étudier la dérivabilité de f à gauche en -4 et à droite en 2 , puis interpréter graphiquement les résultats.
5. a. Montrer que, pour tout $x \in D_f \setminus \{-4; 2\} : f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-8}}$.
 b. Dresser le tableau de variations de f .
6. Tracer (D) , (D') et $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 10 — Étude d'une fonction trigonométrique

★★★★★

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$ si $x \neq k\pi$, et $f((2k+1)\pi) = 0$, où $k \in \mathbb{Z}$.

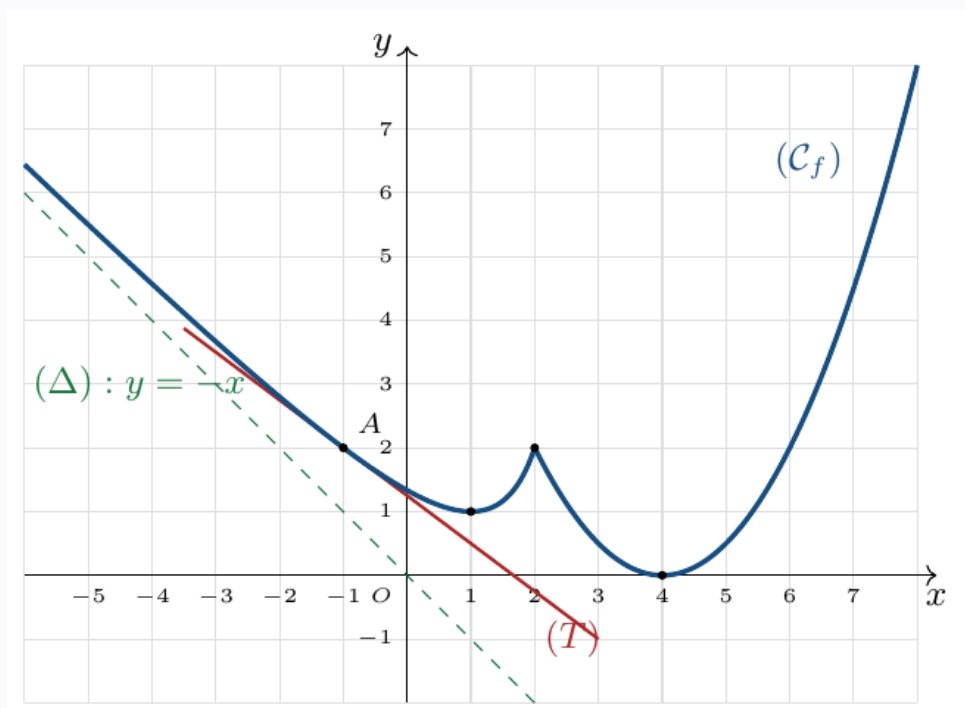
1. Montrer que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que f est périodique de période 2π .
4. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $D_E =]0; \pi]$.
5. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = f(\pi)$.

6. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.
7. a. Montrer que, pour tout $x \in]0; \pi[: f'(x) = \frac{-1}{1 - \cos x}$.
b. Dresser le tableau de variations de f sur D_E .
8. Construire $(\mathcal{C}_f)$ sur $] - 2\pi; 2\pi[\setminus \{0\}$.

Exercice 11 — Lecture d'une courbe

★★★★★

Dans la figure ci-dessous, $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La droite $(\Delta) : y = -x$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$; la droite rouge (T) est la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point $A(-1; 2)$. La courbe admet une tangente horizontale aux points d'abscisses 1 et 4, et un point anguleux d'abscisse 2 (demi-tangentes de coefficients directeurs 3 à gauche et -2 à droite). Au voisinage de $+\infty$, $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.



1. Déterminer D_f , puis déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
2. Déterminer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
3. Donner le tableau de variations de la fonction f en précisant le signe de f' .
4. Déterminer : $f'(1)$; $f'_g(2)$; $f'_d(2)$ et $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x - 4}$.
5. Dresser le tableau de concavité de $(\mathcal{C}_f)$ en précisant le signe de f'' (là où elle existe).
6. Donner l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse -1 .
7. Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre des solutions de l'équation $f(x) = m$ (on admettra que $f(6) = 2$).

Exercice 12 — Fonction définie par morceaux

★★★★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} - 5$ si $x \geq 1$ et $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 2}$ si $x < 1$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x + 1))$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. Étudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et de la droite (D) d'équation $y = x + 1$ sur $] - \infty; 1[$.
4. Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1 et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

5. Montrer que : $(\forall x \in]1; +\infty[) f'(x) = \frac{x-4}{2x\sqrt{x}}$ et $(\forall x \in]-\infty; 1[) f'(x) = \frac{(x-2)^2-2}{(x-2)^2}$.
6. Dresser le tableau de variations de f .
7. Montrer que : $(\forall x \in]1; +\infty[) f''(x) = \frac{12-x}{4x^2\sqrt{x}}$ et $(\forall x \in]-\infty; 1[) f''(x) = \frac{4}{(x-2)^3}$.
8. Étudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ et montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet un unique point d'inflexion I .
9. Calculer $f(4)$ et déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et de l'axe (Ox) .
10. Construire $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 13 — *Fonction irrationnelle*

★★★★★

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x+2}}$.

1. Déterminer D_f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
4. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
5. a. Montrer que, pour tout $x \in D_f \setminus \{0\}$: $f'(x) = \frac{x+3}{x+2} \sqrt{\frac{x}{x+2}}$.
b. Dresser le tableau de variations de f .
6. a. Montrer que, pour tout $x \in D_f \setminus \{0\}$: $f(x) - x = \frac{-2x}{(x+2) \left(\sqrt{\frac{x}{x+2}} + 1 \right)}$.
b. En déduire que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $\pm\infty$.
7. Construire $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 14 — *Fonction impaire*

★★★★★

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer D_f , puis montrer que la fonction f est impaire.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3. a. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) f(x) - (x-1) = \frac{-2}{x(x + \sqrt{x^2+2})}$.
b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis déduire que la droite (D) : $y = x - 1$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
4. Étudier la position relative de la droite (D) et de $(\mathcal{C}_f)$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.
5. a. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2\sqrt{x^2+2}}$.
b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.
6. a. Déterminer le point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses sur $\mathbb{R}^{*+}$.
b. Écrire l'équation de la tangente (T) en ce point.
7. Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^{*+}$, puis étudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.
8. Construire $(\mathcal{C}_f)$ et (T) .