

Série d'exercices — Chapitre 11

Dérivation

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Cadre. Toute réponse doit être justifiée. Dans chaque exercice, x désigne un réel appartenant au domaine de définition de l'expression étudiée, h un réel non nul voisin de 0, $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Les notions d'asymptote et de branche infinie (chapitre 12) ne sont pas utilisées. Difficulté : de ★ à ★★★★★.

Exercice 1 — Dérivabilité en un point

★★★★★

Étudier la dérivabilité de la fonction f en a et interpréter graphiquement le résultat dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = 3x - 4$ et $a = 2$;
2. $f(x) = \sqrt{2x-1}$ et $a = 5$;
3. $f(x) = 1 - \cos(2x)$ si $x \geq 0$ et $f(x) = \sin(3x)$ si $x < 0$, et $a = 0$;
4. $f(x) = x^3$ et $a = -2$.

Exercice 2 — Approximation affine

★★★★★

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^4$. Montrer que f est dérivable en 0, donner l'approximation affine de f au voisinage de 0, puis en déduire une valeur approchée du nombre $(1,002)^4$.
2. Montrer que, pour tout réel h voisin de 0 : $\frac{1}{1+2h} \approx 1 - 2h$ et $\sqrt{1+4h} \approx 1 + 2h$.

Exercice 3 — Dérivabilité et calcul de dérivées

★★★★★

Préciser l'ensemble sur lequel la fonction f est dérivable, puis calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 2$;
2. $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-x-6}$;
3. $f(x) = \sqrt{2x+6}$;
4. $f(x) = \frac{x^3}{x^2+3}$;
5. $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$;
6. $f(x) = 3 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3}$.

Exercice 4 — Fonction définie par morceaux

★★★★★

Soit c un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4\sqrt{x+1}$ si $x \geq 3$ et $f(x) = x^2 - 5x + c$ si $x < 3$.

1. Déterminer le réel c pour que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$.
2. Pour cette valeur de c , montrer que f est dérivable en 3 et préciser $f'(3)$. Déterminer ensuite $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 — Limites et nombre dérivé

★★★★★

En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)^{2027} + 1}{x-1}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x+7} - 6}{x-2}$;
3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{1}{x+3} - \frac{1}{2}}{x+1}$;

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{\tan x - \sqrt{3}}.$$

Exercice 6 — *Extremums d'un polynôme*

★★★★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que f admet deux extremums locaux, dont on précisera la nature et l'intervalle ouvert sur lequel chacun est un extremum.

Exercice 7 — *Tableaux de variations*

★★★★★

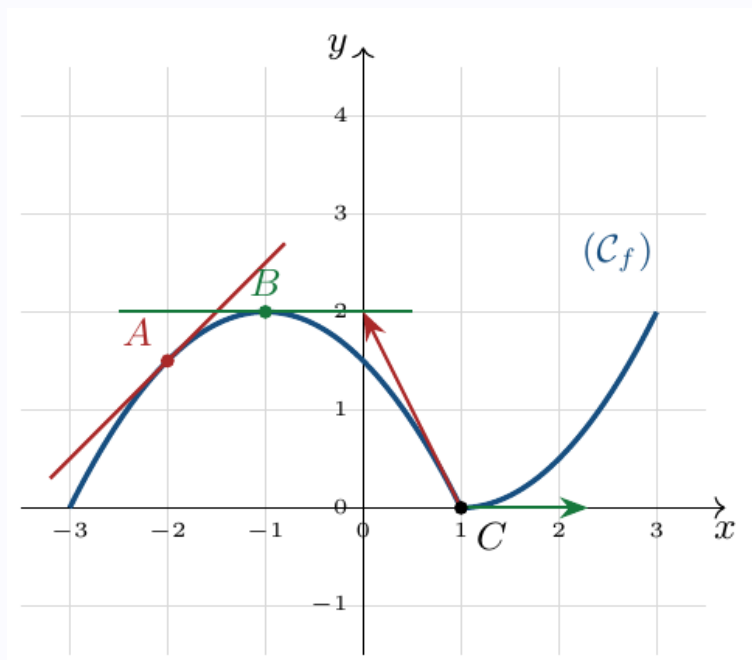
Dresser le tableau de variations de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$;
2. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$;
3. $f(x) = \frac{3}{x^2 + 4x}$;
4. $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$.

Exercice 8 — *Lecture graphique*

★★★★★

La figure ci-dessous représente la courbe $(\mathcal{C}_f)$ d'une fonction f définie sur $[-3; 3]$ dans un repère orthonormé. La droite rouge passant par $A(-2; \frac{3}{2})$ est la tangente en A ; la droite verte passant par $B(-1; 2)$ est la tangente en B ; au point $C(1; 0)$ sont tracées deux demi-tangentes (rouge à gauche, verte à droite).



1. Déterminer $f(-2)$, $f'(-2)$ et $f'(-1)$.
2. Déterminer graphiquement $f'_g(1)$ et $f'_d(1)$.
3. En déduire que f n'est pas dérivable en 1.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $[-3; 3]$ (on donne $f(3) = 2$).
5. En déduire le tableau de signe de f' sur $[-3; 3]$.

Exercice 9 — *Une inégalité classique*

★★★★★

Soient p et q deux réels strictement positifs. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^3 + p^3 + q^3 - 3pqx$.

1. Vérifier que $p^3 + q^3 - 2pq\sqrt{pq} = (p\sqrt{p} - q\sqrt{q})^2$.

2. Vérifier que, pour tout $x \in]0; +\infty[: f'(x) = 3(x + \sqrt{pq})(x - \sqrt{pq})$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f .
4. En déduire que f admet une valeur minimale positive sur $]0; +\infty[$.
5. Déduire que, pour tous réels a, b, c de $]0; +\infty[: a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

Exercice 10 — *Optimisation*

★★★★★

Un imprimeur doit produire des affiches rectangulaires. Sur chaque affiche, le texte imprimé doit occuper un rectangle d'aire 150 cm^2 ; les marges mesurent 3 cm en haut et en bas et 2 cm à gauche et à droite. Quelles dimensions faut-il donner à une affiche pour que la consommation de papier soit minimale ? (On notera $x > 0$ la largeur, en cm, du rectangle imprimé.)

Exercice 11 — *Fonction définie par morceaux*

★★★★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3}$ si $x < 3$ et $f(x) = \sqrt{x + 1} + 25$ si $x \geq 3$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. a. Étudier la dérivabilité de f à droite en 3 et interpréter graphiquement le résultat.
b. Étudier la dérivabilité de f à gauche en 3 et interpréter graphiquement le résultat.
c. f est-elle dérivable en 3 ?
3. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 3[$ (sans simplifier la fraction au préalable).
b. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]3; +\infty[$.
c. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} : 2x^3 - 9x^2 + 27 = (x - 3)^2(2x + 3)$.
d. En déduire une autre expression de $f'(x)$ sur $] -\infty; 3[$, puis dresser le tableau de variations de f .
4. Déterminer l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

Exercice 12 — *Dérivabilité à droite et à gauche*

★★★★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ si $x \leq 3$ et $f(x) = \sqrt{3x - 9}$ si $x > 3$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$.
3. a. Étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 3.
b. Interpréter graphiquement les résultats.
4. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 3[$ et pour tout $x \in]3; +\infty[$.
b. Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 13 — *Fonction auxiliaire*

★★★★★

Partie 1. On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = 3x - 2x\sqrt{x} - 1$.

1. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[: g'(x) = 3(1 - \sqrt{x})$.
2. Dresser le tableau de variations de g (on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$).
3. En déduire que, pour tout $x \in [0; +\infty[: g(x) \leq 0$.

Partie 2. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (2x - 2)\sqrt{x} - x^2 + 1$.

1. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
2. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x}}$.
3. Dresser le tableau de variations de f (on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$), puis en déduire le signe de $f(x)$ sur $[0; +\infty[$.

Exercice 14 — *Encadrements trigonométriques*

★★★★★

On pose $I = [0; +\infty[$.

1. Montrer les inégalités suivantes (on pourra étudier, à chaque fois, la différence des deux membres) :
a. $(\forall x \in I) \quad \sin x \leq x$;

- b. $(\forall x \in I) \quad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2};$
 c. $(\forall x \in I) \quad \sin x \geq x - \frac{x^3}{6};$
 d. $(\forall x \in I) \quad \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24};$
 e. $(\forall x \in I) \quad \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$

2. a. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[: \frac{4}{3} - \frac{4x^2}{15} \leq \frac{2x - \sin(2x)}{x^3} \leq \frac{4}{3}.$
 b. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - \sin(2x)}{x^3}.$
 3. En posant $x = -t$, en déduire $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - \sin(2x)}{x^3}$, puis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin(2x)}{x^3}.$

Exercice 15 — Tangentes et fonction par morceaux

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = x + 6 + \frac{9}{x-1}.$

- a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$
 b. Déterminer les points $M(a; f(a))$ de (C_f) en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
- Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = f(x)$ si $x < 0$; $h(x) = x^2 - 4x - 3$ si $0 \leq x < 2$; $h(x) = \sqrt{x^2 - 4} - 7$ si $x \geq 2$. Étudier la dérivabilité de h en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
- a. Étudier la dérivabilité de h en 2 et interpréter graphiquement les résultats.
 b. Montrer que h est dérivable sur $]2; +\infty[$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]2; +\infty[.$
 c. Écrire une équation de la tangente à la courbe (C_h) au point d'abscisse $2\sqrt{2}.$

Exercice 16 — Étude avec une fonction auxiliaire

★★★★★

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + x + 4.$

- Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}.$
- On admet que l'équation $g(x) = 0$ possède une solution unique α dans $\mathbb{R}.$ Montrer que $-2 < \alpha < -1$, puis étudier le signe de $g(x)$ sur $] -\infty; \alpha[$ et sur $]\alpha; +\infty[.$
- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}.$
 a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^* : f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}.$
 b. En déduire les variations de f sur chacun des intervalles $] -\infty; \alpha], [\alpha; 0[$ et $]0; +\infty[.$
 c. Écrire l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 2.

Exercice 17 — Limites et nombre dérivé (cas général)

★★★★★

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I contenant un réel a , telle que $f'(a) = -3.$

- Calculer : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+5h) - f(a)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h) - f(a+h)}{h}$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+4h) - f(a-h)}{2h}.$
- Calculer, en fonction de a et de $f(a)$, la limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 f(a) - a^2 f(x)}{x - a}.$

Exercice 18 — Inégalité de convexité (puissances)

★★★★★

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$ et f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{(1+x)^n}{1+x^n}.$

- Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{n(1+x)^{n-1}(1-x^{n-1})}{(1+x^n)^2}.$
- Dresser le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$ (sans les limites).
- En déduire que, pour tout $x \in]0; +\infty[: (1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n).$
- Montrer que, pour tous réels a, b de $]0; +\infty[: \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}.$

Exercice 19 — *Problèmes d'optimisation*

★★★★★

1. L'aire d'un rectangle est 81 m^2 . Déterminer les dimensions de ce rectangle pour que son périmètre soit minimal.
2. x et y sont deux réels strictement positifs tels que $xy = 12$. Déterminer x et y pour que la somme $x + 3y$ soit minimale.

Exercice 20 — *Problème*

★★★★★

Partie 1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + (2-x)^2}$.

1. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R} : x^2 + (2-x)^2 = 2(x-1)^2 + 2$, puis en déduire que $D_f = \mathbb{R}$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{-4x(x-2)}{(x^2 + (2-x)^2)^2}$.
 b. Dresser le tableau de variations de f .
 c. En déduire les extremums de f sur $\mathbb{R}$.
 d. Calculer $f'(1)$ et interpréter le résultat graphiquement.
4. Déterminer $f([0; 2])$.

Partie 2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{2-x}}$.

1. Montrer par l'absurde que, pour tout $x \in [0; 2] : \sqrt{x} + \sqrt{2-x} \neq 0$.
2. Montrer soigneusement que $D_g = [0; 2]$.
3. a. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$.
 b. Montrer que, pour tout $x \in [0; 2] : g(2-x) = 1 - g(x)$.
4. a. Étudier la dérivabilité de g à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.
 b. En déduire que g n'est pas dérivable à gauche en 2.
5. a. Montrer que g est dérivable sur $]0; 2[$ et que : $(\forall x \in]0; 2[) \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^2}$.
 b. Dresser le tableau de variations de g sur $[0; 2]$.
 c. Déduire l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_g)$ au point d'abscisse 1.

Exercice 21 — *Dérivabilité et partie entière*

★★★★★

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{a} E\left(\frac{2}{x}\right) \text{ si } x > 0, \quad f(0) = 0, \quad f(x) = \frac{3 \cos(bx) - 2 \cos(2x) - 1}{x} \text{ si } x < 0,$$

où E désigne la fonction partie entière.

1. a. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[: \left| \frac{x}{a} E\left(\frac{2}{x}\right) - \frac{2}{a} \right| < \left| \frac{x}{a} \right|$.
 b. En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = \frac{2}{a}$.
2. Montrer que f est dérivable à gauche en 0 et que $f'_g(0) = 4 - \frac{3b^2}{2}$.
3. Déterminer les valeurs de a et b pour que f soit dérivable en 0 et que la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0 soit perpendiculaire à la droite (Δ) d'équation $x + 2y = 0$.