

Série d'exercices — Chapitre 10

Rotation dans le plan

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Cadre. Le plan $\mathcal{P}$ est orienté dans le sens direct. Pour un point Ω et un réel θ , $r(\Omega; \theta)$ désigne la rotation de centre Ω et d'angle θ . Chaque réponse doit citer la propriété de la rotation utilisée. Difficulté : de ★ à ★★★★★.

Exercice 1 — Images et antécédents

★★★★★

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, et $r = r(O; \frac{\pi}{2})$.

1. Déterminer $r(B)$, puis en déduire $r^{-1}(C)$.
2. Déterminer $r(D)$, puis en déduire $r^{-1}(A)$.

Exercice 2 — Orthogonalité par rotation d'un quart de tour

★★★★★

Soit ABC un triangle et $r = r(A; -\frac{\pi}{2})$.

1. Construire les points E et F tels que $r(B) = E$ et $r(C) = F$.
2. Montrer que $EF = BC$ et que $(EF) \perp (BC)$.

Exercice 3 — Conservation du coefficient de colinéarité et du milieu

★★★★★

Soient A , B et C trois points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$, et O le milieu du segment $[BC]$. On considère $r = r(O; \frac{\pi}{5})$ et on pose $A' = r(A)$, $B' = r(B)$, $C' = r(C)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{A'B'} = -2\overrightarrow{A'C'}$.
2. Montrer que O est le milieu du segment $[B'C']$.

Exercice 4 — Losange

★★★★★

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

1. Déterminer une mesure de l'angle de la rotation r de centre C qui transforme A en B .
2. Construire le point D , image de B par r .
3. En déduire que le quadrilatère $ABDC$ est un losange.

Exercice 5 — Choisir la bonne rotation

★★★★★

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On note I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[CD]$.

1. En utilisant la rotation $r(O; \frac{\pi}{2})$, montrer que $AI = BJ$ et $(AI) \perp (BJ)$.

Exercice 6 — Triangles rectangles isocèles extérieurs

★★★★★

Soit ABC un triangle tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \in]0; \pi[$. On construit à l'extérieur du triangle les points D et E tels que ABD et ACE soient rectangles et isocèles en A .

1. En utilisant une rotation convenable, montrer que $CD = BE$ et $(CD) \perp (BE)$.

Exercice 7 — Rotation de centre le milieu de l'hypoténuse

★★★★★

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en C tel que $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soient I le milieu de $[AB]$ et E le symétrique de B par rapport à C . On considère $r = r(I; \frac{\pi}{2})$.

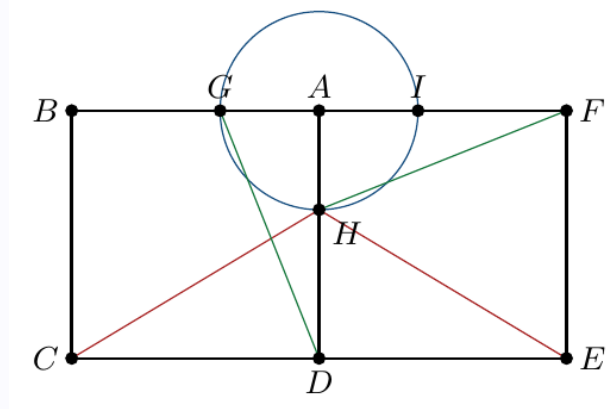
1. Construire une figure et montrer que $r(A) = C$ et $r(C) = B$.
2. Construire le point $F = r(E)$.
3. Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{CE}; \overrightarrow{CA})$ et en déduire que $(\overrightarrow{BF}; \overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.
4. Montrer que $BF = CA$.

5. Montrer que $AE = AB$, puis en déduire que $CF = AB$.
6. En déduire la nature du quadrilatère $ACFB$.

Exercice 8 — Deux carrés accolés et un cercle

★★★★★

$ABCD$ et $ADEF$ sont deux carrés disposés comme sur la figure. Soit G un point du segment $[AB]$ distinct de A et B , et (Γ) le cercle de centre A passant par G ; (Γ) coupe $[AD]$ en H et $[AF]$ en I .



1. En utilisant une rotation convenable, montrer que $DG = FH$ et $CH = EI$.

Exercice 9 — Déterminer une rotation (1)

★★★★★

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$, et r la rotation qui transforme A en B et B en C .

1. Déterminer une mesure α de l'angle de r (on rappelle que $(-\vec{u}; \vec{v}) \equiv \pi + (\vec{u}; \vec{v}) [2\pi]$).
2. Déterminer le centre Ω de r .

Exercice 10 — Déterminer une rotation (2)

★★★★★

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

1. Déterminer le centre et une mesure de l'angle de la rotation r telle que $r(C) = A$ et $r(A) = B$.

Exercice 11 — Deux carrés de même sommet — barycentre

★★★★★

On considère deux carrés $ABCD$ et $AEFG$ tels que $AB = AE$, $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AG}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

1. Construire une figure convenable.
2. Déterminer une mesure de l'angle de la rotation r de centre A qui transforme B en E .
3. a. Montrer que $r(C) = F$ et $r(D) = G$.
b. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{EF})$.
4. Soit K le barycentre des points pondérés $(A; -2)$, $(B; 2)$ et $(C; 1)$, et $K' = r(K)$. Montrer que $K \in (DC)$, puis que les points K' , F et G sont alignés.

Exercice 12 — Milieux et alignement

★★★★★

Soit OEF un triangle et $r = r(O; -\frac{\pi}{2})$.

1. Construire les points C et D tels que $r(F) = C$ et $r(D) = E$.
2. En déduire que $DF = EC$ et que $(DF) \perp (EC)$.
3. Soient A le point tel que $r(E) = A$, et I le milieu de $[EF]$. On pose $J = r(I)$ et on note H le projeté orthogonal de O sur la droite (DC) .
a. Montrer que O est le milieu du segment $[AD]$.
b. Montrer que $2\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{DC}$.
c. En déduire que les points I , O et H sont alignés.

Exercice 13 — Existence et éléments d'une rotation

★★★★★

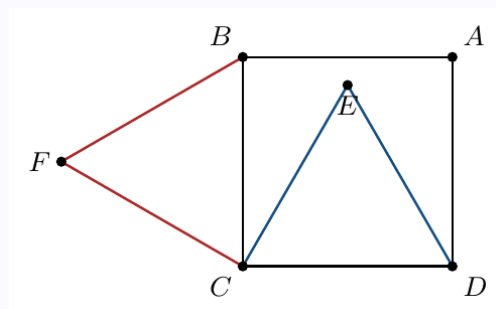
Soit ABC un triangle isocèle en A et M un point du segment $[BC]$ distinct de B et de C . La parallèle à (AB) passant par M coupe (AC) en E ; la parallèle à (AC) passant par M coupe (AB) en F .

1. Montrer que $AE = BF$.
2. Montrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(A) = B$ et $r(E) = F$.
3. Soit α une mesure de $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$. Déterminer, en fonction de α , une mesure de l'angle de r .
4. Montrer que $r(C) = A$.
5. Déterminer le centre Ω de r .

Exercice 14 — Alignement par les angles

★★★★★

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On construit les triangles équilatéraux CDE (à l'intérieur du carré) et BCF (à l'extérieur du carré), comme sur la figure.



1. En utilisant une rotation de centre C , montrer que $DE = BF$ et $(DE) \perp (BF)$.
2. Montrer que les points A , E et F sont alignés.

Exercice 15 — Rotations de même centre

★★★★★

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A , non rectangle. Soit $R = r(A; \frac{\pi}{3})$.

1. a. Construire les points E et F tels que $R(B) = E$ et $R(C) = F$.
b. Montrer que $BC = EF$.
2. Soit $R' = r(A; -\frac{2\pi}{3})$ (rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ dans le sens indirect).
a. Construire le point $K = R'(B)$.
b. Montrer que A est le milieu du segment $[EK]$.
3. Montrer que le triangle EFK est rectangle en F .

Exercice 16 — Composée de deux rotations

★★★★★

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Soient I le milieu de $[BC]$ et J le point tel que B soit le milieu de $[JC]$. On pose $R_A = r(A; \frac{\pi}{3})$ et $R_B = r(B; -\frac{2\pi}{3})$.

1. Soient A' et B' les images respectives de A et B par $R_B \circ R_A^{-1}$. Montrer que I est le milieu de $[AA']$ et que $B' = C$.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $R_B \circ R_A^{-1}$.
3. Soit M un point quelconque du plan ; on pose $M_1 = R_A(M)$ et $M_2 = R_B(M)$. Montrer que I est le milieu de $[M_1M_2]$.
4. Montrer que $R_B \circ R_A$ est une rotation dont on déterminera l'angle et le centre.