

Série d'exercices — Chapitre 09

Limite d'une fonction

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Cadre. Toute réponse doit être justifiée. Pour chaque limite, on vérifiera d'abord que la fonction est bien définie au voisinage du point considéré, puis on précisera la forme obtenue (forme déterminée ou forme indéterminée) avant de la lever. Les notions de continuité et de dérivation ne sont **pas** utilisées dans ce chapitre. Difficulté : de ★ à ★★★★★.

Exercice 1 — Opérations sur les limites (formes déterminées)

★★★★★

Calculer chacune des limites suivantes (dans chaque cas, la variable x est un réel appartenant au domaine de définition de l'expression) :

1. $\lim_{x \rightarrow 4} \left(5x^3 + 2 - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) ;$
2. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + x}{x^2 - x - 6} ;$
3. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x - 1}{x^2 - 4x + 3} ;$
4. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 7}{2 - x} ;$
5. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5}{x - x^2} ;$
6. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{9 - x^2} ;$
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x)^3 (1 - 3x^2) ;$
8. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3} \right) ;$
9. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{2 - \frac{3}{x}} ;$
10. $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{1 - 5x} ;$
11. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{3x}{x - 1} - \frac{2}{1 - x^2} \right).$

Exercice 2 — Formes indéterminées : factorisation, identités remarquables

★★★★★

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2 + 5x + 2}{-x^3 + x^2 + 5x + 3} ;$
2. $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{x - 16}{\sqrt{x} - 4} ;$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 2\sqrt{x}) ;$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) ;$
5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} ;$
6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{3x^2 - x - 2} ;$
7. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{3x}}{x - 3} ;$
8. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 3x} ;$
9. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} ;$

10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1};$
11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1};$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^3 - 27}{x};$
13. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x-1)^2};$
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^3 + (x-2)^2 - 5}{x};$
15. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3 - 2x - 21}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9};$
16. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 4x^2 - x + 2}{x^2 - 5x + 6};$
17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x-1} - 2x^2 + x + 5);$
18. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5-x} - x^4 + x).$

Exercice 3 — Formes indéterminées : expression conjuguée

★★★★★

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x-1};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{x};$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - \sqrt{4x+1}}{x-2};$
4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+8} - 3}{x^2+x};$
5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+16} - 5}{\sqrt{x^2+16} - 5};$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x^2 - x};$
7. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - \sqrt{x+13}}{\sqrt{x+6} - 3};$
8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{\sqrt{4x+1} - 3};$
9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x-2} - \sqrt{x^2-x+1}}{x-1};$
10. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{2x+1} - 3};$
11. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2-9} + \sqrt{x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x-3}};$
12. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+12} - 4}.$

Exercice 4 — Formes indéterminées en $\pm\infty$ avec des racines

★★★★★

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + x});$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 4});$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^2 + x + 2} + 5x - 1);$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - 2x + 1);$
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 6x - 1} + x + 2);$

6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 12x - 5} + 3x - 1);$
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 2\sqrt{x}} - \sqrt{x});$
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x + 2});$
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 3}{2x - \sqrt{x}};$
10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + x}}{\sqrt{x^2 + 1} - 3x};$
11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1}}{x + 3};$
12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 2x - 3}}{2x};$
13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x - 1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x + 2} + \sqrt{x}};$
14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x^2 - x + 2}.$

Exercice 5 — *Polynômes et fonctions rationnelles*

★★★★★

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 3x^5 + x);$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^4 + x^3 + 2);$
3. $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 2x^2 - 5);$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^4 - x^6 + 2x);$
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 + 4x - 1};$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - x + 2}{2x^3 + x^2 - 7};$
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x + 1}{3x - 1};$
8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3 + x}{2x^2 + 1};$
9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^7 - x^3}{-3x^4 + x^2};$
10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - 4x}{6x^4 + 2x^3 - 1};$
11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x}{(2x + 1)^2};$
12. $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{x^2 + 3x}{(2x + 1)^2};$
13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{(2x + 1)^2};$
14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{4x^2 + x + 1}}.$

Exercice 6 — *Limites trigonométriques*

★★★★★

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{2x};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(6x)}{x^2};$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x};$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x};$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(3x)}{x^3};$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x^3};$
7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\tan(x-2)}{x^2 - 4};$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{\tan(3x)};$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \tan x};$
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{3}{x}\right);$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)(\cos x - 1)}{x^3};$
12. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x};$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \sin(3x)}{\tan x};$
14. $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1 + 3 \cos x}{\sin x};$
15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + \cos x);$
16. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 1};$
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \sqrt{3} \sin x - 1}{x};$
18. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \cos x + \sin x - 2}{x - \frac{\pi}{6}};$
19. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}};$
20. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\pi - 2x)^2};$
21. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{4x - \pi}.$

Exercice 7 — Limites avec la partie entière

★★★★★

On note $E(x)$ la partie entière du réel x ; on rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - 1 < E(x) \leq x$. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(2x)}{x};$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (E(x) + \cos x);$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 E\left(\frac{1}{x}\right);$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x E\left(\frac{1}{x}\right);$
5. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3E(x) + (x - E(x))^2}{x^2 + x};$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x - E(x)}}{x};$
7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{E(x^2) - x^2}{x^2};$
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x^2) + x}{x^2};$
9. $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - E(x)}.$

Exercice 8 — Définition mathématique de la limite

★★★★★

En revenant à la définition mathématique de la limite (avec ε , α , A , B), montrer que :

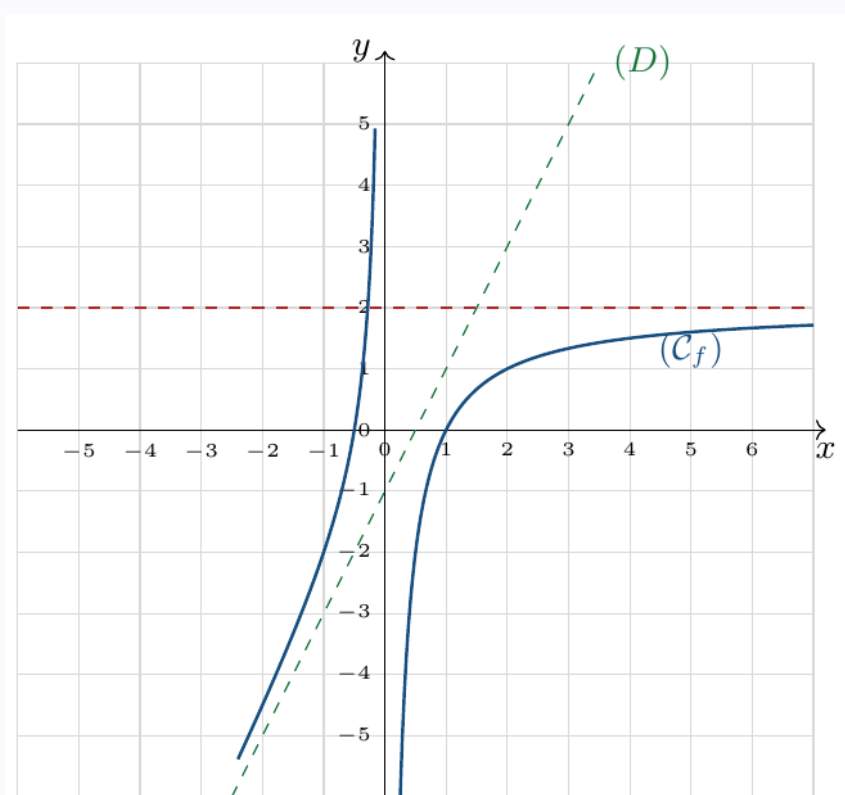
1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-1}{x+3} = 1$;
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{x+3} = 3$;
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = -\infty$;
4. $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{1-2x}{x+3} = +\infty$.

Exercice 9 — Lecture graphique de limites

★★★★★

La courbe (C_f) ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$. On donne de plus les informations suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ (la courbe se rapproche de la droite d'équation $y = 2$ au voisinage de $+\infty$) ;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (2x - 1)) = 0$ (la courbe se rapproche de la droite $(D) : y = 2x - 1$ au voisinage de $-\infty$) ;
- la courbe « monte » ou « descend » indéfiniment le long de l'axe des ordonnées, comme sur la figure.



1. Par lecture graphique et à l'aide des informations précédentes, déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - 2}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
2. Résoudre graphiquement, dans $\mathbb{R}^*$, les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = -2$.
3. Déterminer graphiquement le nombre de solutions dans $\mathbb{R}^*$ de l'équation $f(x) = 3$.
4. On considère la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
 - a. Déterminer graphiquement l'ensemble de définition D_g de g .
 - b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$.

Exercice 10 — *Fonction définie par morceaux — encadrement*

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{4x^2 + 1}}{x + 3} \quad \text{si } x \geq 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\sin x - \sqrt{3 + \cos x}}{x} \quad \text{si } x < 0.$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. La fonction f admet-elle une limite en 0 ? Justifier.
3. a. Montrer que, pour tout $x \in]-\infty; 0[, |f(x)| \leq \frac{3}{|x|}$.
b. En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Exercice 11 — *Une limite paramétrée par n*

★★★★★

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{k=1}^n x^k - n}{\sin(2x - 2)} = \frac{n(n+1)}{4}$.

Exercice 12 — *Fonction définie par morceaux — domaine et limites*

★★★★★

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{3 - \sqrt{x + 8}} \quad \text{si } x > 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\sqrt{1 - x}}{x^2 + x - 2} \quad \text{si } x < 1.$$

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; 1[\cup]1; +\infty[$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Que peut-on conclure ?
4. Étudier la limite de f en -2 .

Exercice 13 — *Partie entière et encadrement*

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x E(2x) + 1}{x^2 + 1}$.

1. a. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$: $\frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 1} < f(x) \leq \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}$.
b. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Exercice 14 — *Limites variées (changement de variable)*

★★★★★

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$;
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2027}{\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x}$;
3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - \sqrt{x + 5}}{x^2 - 2x - 3}$;
4. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x\sqrt{x + 5} + 4}{x^2 + x - 12}$;
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 4x^2) \tan\left(\frac{\pi}{x^2 + 3}\right)$;
6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - 3(2x - 1)^5}{x^2 - 1}$.

Exercice 15 — *Réurrence et limites trigonométriques*

★★★★★

Soit $a \in]0; +\infty[$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^n(ax)}{x^2} = \frac{na^2}{2}$.
2. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^4(2x)}{1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)}$.