

## Série d'exercices — Chapitre 08

## Trigonométrie (calcul trigonométrique)

1<sup>ère</sup> Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

**Cadre.** Dans toute la série,  $x, y, a, b$  désignent des réels et  $k$  un entier relatif; une égalité contenant  $\tan$  n'est à établir que lorsque toutes les expressions sont définies. Toute réponse doit être justifiée; le symbole  $\iff$  n'est employé que si chaque étape est réversible. Les inéquations se résolvent à l'aide du cercle trigonométrique. Difficulté : de ★ à ★★★★★.

**Exercice 1** — Formules d'addition — calcul d'un angle

★★★★★

- Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer de deux façons (formules d'addition, puis transformation d'une somme en produit) que :
  - $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$ ;
  - $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$ .
- On considère deux réels  $a$  et  $b$  de  $]0; \frac{\pi}{2}[$  tels que  $\tan a = \frac{1}{2}$  et  $\tan b = \frac{1}{3}$ .
  - Calculer  $\cos a, \sin a, \cos b$  et  $\sin b$ .
  - Calculer  $\sin(a+b)$  et  $\cos(a+b)$ , puis en déduire la valeur de  $a+b$ .

**Exercice 2** — Identités avec la tangente

★★★★★

- On considère un réel  $x$  tel que  $x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$  et  $x \notin \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ . Montrer que  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2 \tan 2x$ .
- On considère un réel  $x$  tel que  $x \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Montrer que  $\frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}}$ .

**Exercice 3** — Produits et sommes

★★★★★

- Pour  $x \in \mathbb{R}$ , transformer en sommes :
 
$$A(x) = \sin 3x \cos x; \quad B(x) = \cos 4x \cos 2x;$$

$$C(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$D(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$
- Pour  $x \in \mathbb{R}$ , transformer en produits :  $E(x) = \sin 5x - \sin 3x$  et  $F(x) = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$ .
- Montrer, sans calculatrice, que  $\cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ .

**Exercice 4** — Linéarisation et équation

★★★★★

On considère la fonction  $A$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $A(x) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ .

- Calculer  $A\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .
- Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $2 \cos^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x$  et  $2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x$ .
- En déduire que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $A(x) = \frac{3}{4}$ .

**Exercice 5** — Identités trigonométriques

★★★★★

Soient  $x$  et  $y$  deux réels. Montrer les identités suivantes (lorsque toutes les expressions sont définies) :

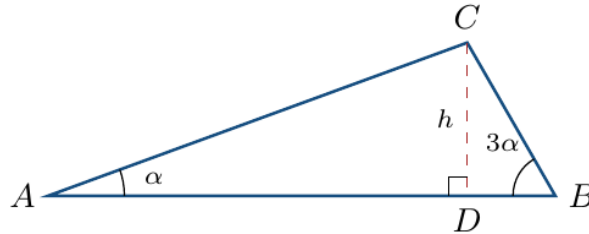
- $\cos 3x = \cos x (2 \cos 2x - 1)$  et  $\sin 3x = \sin x (2 \cos 2x + 1)$ ;
- $\frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} = \frac{1 - \tan x \tan y}{1 + \tan x \tan y}$ ;
- $\tan x + \tan y = \frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)}$ ;

$$4. \frac{\cos(x+y)\cos(x-y)}{\cos^2 x \cos^2 y} = 1 - \tan^2 x \tan^2 y.$$

**Exercice 6** — Trigonométrie dans un triangle

★★★★★

On considère un réel  $\alpha \in ]0; \frac{\pi}{6}[$  et un triangle  $ABC$  tel que  $\widehat{BAC} = \alpha$  et  $\widehat{ABC} = 3\alpha$ . On note  $D$  le pied de la hauteur issue de  $C$  et  $h = CD$ .



- Justifier que  $D \in [AB]$ , puis que  $0 < \tan \alpha < \frac{\sqrt{3}}{3}$ .
- Montrer que  $\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan 3\alpha} = \frac{AB}{h}$ .
- En déduire que  $h = AB \times \frac{\tan \alpha (3 - \tan^2 \alpha)}{4(1 - \tan^2 \alpha)}$ .

**Exercice 7** — Relations dans un triangle

★★★★★

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  les mesures, en radians, des angles d'un triangle, de sorte que  $A + B + C = \pi$ . Montrer que :

- $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C$  ;
- si le triangle n'est pas rectangle :  $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ .

**Exercice 8** — Équations trigonométriques

★★★★★

Résoudre les équations suivantes dans  $\mathbb{R}$ , puis dans l'intervalle  $I$  indiqué :

- $(E_1) : 2 \cos(2x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{2} = 0$  ;  $I = [0; 2\pi[$  ;
- $(E_2) : \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}$  ;  $I = [-\pi; \pi[$  ;
- $(E_3) : \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$  ;  $I = \mathbb{R}$  ;
- $(E_4) : \tan^2 x + (1 - \sqrt{3}) \tan x - \sqrt{3} = 0$  ;  $I = [-3\pi; -\pi[$ .

**Exercice 9** — Inéquations trigonométriques

★★★★★

Résoudre chaque inéquation dans l'intervalle  $I$  indiqué :

- $\sin x \geq \frac{1}{2}$  ;  $I = ]-\pi; \pi]$  ;
- $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$  ;  $I = [0; 2\pi]$  ;
- $\tan x \leq \sqrt{3}$  ;  $I = [0; 2\pi]$  ;
- $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$  ;  $I = [0; 2\pi]$  ;
- $\tan x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$  ;  $I = [-\pi; \pi]$ .

**Exercice 10** — Factorisation, équation et signe

★★★★★

On considère la fonction  $A$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $A(x) = 2 \sin 2x + 2 \cos x - \sqrt{2}(2 \sin x + 1)$ .

- Calculer  $A(\frac{\pi}{4})$  et  $A(-\frac{\pi}{6})$ .
- Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $A(x) = (2 \cos x - \sqrt{2})(2 \sin x + 1)$ .
- Résoudre l'équation  $A(x) = 0$  dans  $] -\pi; \pi[$ , puis représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.
- Étudier le signe de  $A(x)$  sur l'intervalle  $] -\pi; \pi[$ .

**Exercice 11** — *Factorisation et inéquation*

★★★★★

On considère la fonction  $A$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $A(x) = 2 \sin^3 x - \sin x + 2 \cos x - 2 \cos^3 x$ .

1. Calculer  $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$  et  $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .
2. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $2 \sin^3 x - \sin x = -\sin x \cos 2x$  et  $2 \cos x - 2 \cos^3 x = \sin x \sin 2x$ .
3. En déduire que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $A(x) = \sqrt{2} \sin x \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ .
4. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $A(x) = 0$ .
5. Résoudre dans  $[0; \pi]$  l'inéquation  $A(x) \geq 0$ .

**Exercice 12** — *Équations se ramenant à un polynôme*

★★★★★

1. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sin 2x = 2 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$ .
2. En déduire les solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $4 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 3$ .
3. On considère la fonction  $A$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $A(x) = 4 \sin^3 x - 12 \sin^2 x - \sin x + 3$ .
  - a. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $A(x) = (3 - \sin x)(1 - 4 \sin^2 x)$ .
  - b. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $3 - \sin x > 0$ .
  - c. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $A(x) = 0$ .

**Exercice 13** — *Équation du second degré en  $\cos x + \sin x$* 

★★★★★

1. a. Vérifier que  $8 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$ .  
 b. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $2X^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})X - \sqrt{3} = 0$ , d'inconnue  $X$ .
2. On considère la fonction  $A$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $A(x) = 2 \sin 2x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})(\cos x + \sin x) + 2 - \sqrt{3}$ .
  - a. Calculer  $(\cos x + \sin x)^2$  et en déduire l'expression de  $\sin 2x$  en fonction de  $\cos x + \sin x$ .
  - b. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $A(x) = 0$ .
3. a. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $A(x) = -16 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{24}\right) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{7\pi}{24}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{24}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{5\pi}{24}\right)$ .  
 b. Étudier le signe de  $A(x)$  sur l'intervalle  $\left[0; \frac{7\pi}{12}\right]$ .

**Exercice 14** — *Calcul de  $\cos \frac{\pi}{5}$* 

★★★★★

Soit  $x$  un réel.

1. Exprimer  $\cos 3x$  en fonction de  $\cos x$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $(E) : 4 \cos^3 x + 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 1 = 0$  (on pourra montrer que  $(E)$  équivaut à  $\cos 3x + \cos 2x = 0$ ).
3. En déduire les solutions de l'équation  $(E)$  dans l'intervalle  $[0; 2\pi]$ .
4. On considère l'équation  $(F) : 4X^3 + 2X^2 - 3X - 1 = 0$ , d'inconnue réelle  $X$ .
  - a. Vérifier que  $-1$  est une solution de  $(F)$ , puis déterminer les autres solutions.
  - b. Montrer que  $\cos \frac{\pi}{5}$  est une solution de  $(F)$ .
  - c. En déduire que  $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ .

**Exercice 15** — *Problème — les cosinus de  $\frac{2\pi}{7}$* 

★★★★★

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\cos 4x = \cos 3x$ .
2. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$  et  $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$ .
3. En déduire que l'équation  $8t^4 - 4t^3 - 8t^2 + 3t + 1 = 0$ , d'inconnue réelle  $t$ , a pour ensemble de solutions

$$S = \left\{ 1; \cos \frac{2\pi}{7}; \cos \frac{4\pi}{7}; \cos \frac{6\pi}{7} \right\}.$$

4. Factoriser le polynôme  $P(t) = 8t^4 - 4t^3 - 8t^2 + 3t + 1$  en produit de facteurs du premier degré.
5. En déduire que  $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$  et que  $\cos \frac{2\pi}{7} \times \cos \frac{4\pi}{7} \times \cos \frac{6\pi}{7} = \frac{1}{8}$ .

**Exercice 16** — *Sommes trigonométriques*

★★★★★

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que :

1. pour tout réel  $x \notin \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  :  $\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$  ;
2. pour tout réel  $x \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  :  $\sum_{k=1}^n \cos((2k-1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2 \sin x}$  ;
3. pour tout réel  $x$  tel que  $\sin(2^{n+1}x) \neq 0$  :  $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \tan(2^k x) = \frac{1}{\tan x} - \frac{2^n}{\tan(2^n x)}$  (on pourra d'abord établir que  $\tan a = \frac{1}{\tan a} - \frac{2}{\tan 2a}$  lorsque  $\sin 2a \neq 0$ ).