

Série d'exercices — Chapitre 07

Suites numériques

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Cadre. Toute réponse doit être justifiée ; le symbole $\Longleftrightarrow$ n'est employé que si chaque étape est réversible. Lorsqu'une suite est définie par récurrence, on vérifiera que chaque terme est bien défini. Difficulté : de ★ à ★★★★★.

Exercice 1 — Suite homographique — suite arithmétique auxiliaire

★★★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1}$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
3. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 2)^2}{u_n + 1}$.
b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
c. En déduire que (u_n) est majorée par 3.
4. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$.
a. Calculer v_0 et v_1 .
b. Montrer que (v_n) est arithmétique ; préciser sa raison et son premier terme.
c. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n v_k = \frac{(n+1)(n+6)}{6}$.

Exercice 2 — Suite homographique — suite géométrique auxiliaire

★★★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{6u_n - 4}{u_n + 1}$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 4$.
3. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)(u_n - 4)}{u_n + 1}$.
b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
4. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 1}$.
a. Montrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
b. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
c. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n v_k = -\frac{2}{15} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} \right)$.

Exercice 3 — Point fixe double — somme à partir d'un rang

★★★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n + 5}$.

1. Montrer que $u_1 = -\frac{1}{2}$ et $u_2 = -1$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > -2$.
3. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n + 2)^2}{u_n + 5}$.
b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
4. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$.
a. Calculer v_0 , puis montrer que (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

- b. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
- c. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $\sum_{k=3}^n v_k = \frac{(n-2)(n+5)}{6}$.

Exercice 4 — Suite à termes négatifs

★★★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{4 - 3u_n}$.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$.
- Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
- On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$.
 - Montrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
 - Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
 - Calculer, en fonction de n , la somme $S_n = \sum_{i=0}^n v_i$.

Exercice 5 — Suites arithmétiques — calculs de termes

★★★★★

On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r .

- On suppose que $u_0 = 7$ et $r = -3$. Calculer u_{10} et u_{15} , puis déterminer l'entier n tel que $u_n = -98$.
- On suppose que $u_2 = 4$ et $u_{14} = 10$. Calculer r , puis u_0 .
- On suppose que $u_{30} = 52$ et $r = \frac{3}{2}$. Calculer u_0 , puis exprimer u_n en fonction de n et calculer $\sum_{k=0}^{30} u_k$.

Exercice 6 — Suites géométriques — calculs de termes

★★★★★

On considère une suite géométrique (v_n) de raison q .

- On suppose que $v_0 = 81$ et $q = \frac{1}{3}$. Calculer v_4 et v_6 .
- On suppose que $v_4 = 18$ et $v_7 = \frac{2}{3}$. Calculer q , puis v_0 .
- On suppose que $v_3 = -\frac{1}{16}$ et $q = 2$. Calculer v_0 , puis exprimer v_n en fonction de n .

Exercice 7 — Trois termes d'une suite géométrique

★★★★★

Les réels a , b et c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique et vérifient $a + b + c = 19$ et $abc = 216$. Déterminer a , b et c .

Exercice 8 — Trois termes d'une suite arithmétique

★★★★★

Les réels a , b et c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r et vérifient

$$a + b + c = 24 \quad \text{et} \quad a - 2b + 3c = 28.$$

Déterminer a , b , c et r .

Exercice 9 — Rang d'un terme et somme

★★★★★

On considère une suite arithmétique $(u_n)_{n \geq 2}$ de raison $r = -3$ telle que $u_4 = 5$ et $u_p = -40$, où p est un entier, $p \geq 2$.

- Déterminer l'entier p .
- Calculer $\sum_{k=4}^p u_k$.

Exercice 10 — Suite géométrique — rang et somme

★★★★★

On considère une suite géométrique (u_n) de raison 2 telle que $u_3 = 5$ et $u_p = 160$, où $p \in \mathbb{N}$. Déterminer l'entier p , puis calculer, pour tout entier $n \geq 3$, la somme $\sum_{k=3}^n u_k$ en fonction de n .

Exercice 11 — Somme géométrique sans récurrence

★★★★★

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, la somme $S_n = \sum_{k=0}^n (-2)^k$. Montrer, sans utiliser de raisonnement par récurrence (on pourra calculer $S_n - (-2)S_n$ en décalant les indices), que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad S_n = \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3}$.

Exercice 12 — Calcul de sommes

★★★★★

Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = 11 + 18 + 25 + \dots + 704$;
2. $S_2 = \frac{1}{4} + 1 + \frac{7}{4} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{31}{4}$.

Exercice 13 — Suite homographique — seuil

★★★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.
 - a. Montrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
 - b. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
4. Déterminer un entier naturel N tel que, pour tout entier $n > N$, $u_n > 0,99$.

Exercice 14 — Encadrement d'une somme

★★★★★

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est majorée par 1 et minorée par $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 15 — Propriétés caractéristiques généralisées

★★★★★

1. Soit (u_n) une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$. Montrer que, pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$: $u_{n-p} + u_{n+p} = 2u_n$.
2. Soit (v_n) une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$, à termes strictement positifs. Montrer que, pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$: $v_{n-p} \times v_{n+p} = v_n^2$.

Exercice 16 — Problème — suite de Pell et nombre d'argent

★★★★★

On considère la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ définie par $P_1 = 1$, $P_2 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$ (suite de Pell). On admet que $P_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer P_{10} .
2. Montrer que l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$ admet une unique solution positive, notée ω (le « nombre d'argent »).
3. Montrer les égalités : $\omega^2 = 2\omega + 1$, $\omega = 2 + \frac{1}{\omega}$, $\frac{1}{\omega} = \sqrt{2} - 1$ et $\frac{\omega}{1 + \omega^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.
4. Soient α et β deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $V_n = \alpha \omega^n + \beta \left(-\frac{1}{\omega}\right)^n$.
 - a. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+2} = 2V_{n+1} + V_n$.
 - b. Déterminer α et β de sorte que $V_1 = 1$ et $V_2 = 2$. On admet alors que $V_n = P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - c. Vérifier que $1 - \sqrt{2} = -\frac{1}{\omega}$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$.
 - d. Calculer $(1 + \sqrt{2})^3$, puis $(1 + \sqrt{2})^6$, et retrouver P_6 sans calculatrice.

5. On considère la suite $(W_n)_{n \geq 1}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $W_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$.
- a. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \frac{\omega - (-1)^{n+1}\omega^{-(2n+1)}}{1 - (-1)^n\omega^{-2n}}$.
- b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n - \omega = \frac{(-1)^n 2\sqrt{2}}{\omega^{2n} - (-1)^n}$, puis comparer W_n et ω selon la parité de n .