

Série d'exercices — Chapitre 06

Analytique du produit scalaire dans le plan

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Consignes. Dans toute la série, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$; x, y désignent des réels et m un paramètre réel. Toute réponse doit être justifiée; le symbole $\iff$ n'est employé que si chaque étape est réversible. Difficulté : de ★ à ★★★★★.

Exercice 1 — Triangle, distance, cercle et tangente

★★★★★

On considère les points $A(0; 1)$, $B(2; -1)$, $C(1 + \sqrt{3}; \sqrt{3})$ et $D(3; 0)$.

- Calculer les distances AB et AC , puis le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.
- Calculer $\cos(\widehat{AC; AB})$ et $\sin(\widehat{AC; AB})$.
- Déterminer la nature du triangle ABC .
- Montrer que $x + y - 1 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (AB) .
- Calculer la distance $d(C; (AB))$ du point C à la droite (AB) .
- En déduire l'aire du triangle ABC par deux méthodes différentes.
- Soit (C) le cercle de centre A passant par C .
 - Montrer que $x^2 + y^2 - 2y - 7 = 0$ est une équation cartésienne de (C) .
 - Montrer que $B \in (C)$, puis déterminer une équation cartésienne de la tangente à (C) en B .
 - Soit (Δ) la droite passant par D et parallèle à (AB) . Montrer que $x + y - 3 = 0$ est une équation cartésienne de (Δ) .
 - Étudier l'intersection de (Δ) et du cercle (C) .

Exercice 2 — Angle, distance, cercles, régionnement

★★★★★

On considère les points $A(1; 2)$, $B(4; 1)$, $C(3; 3)$ et $D(2; 0)$.

- Calculer les distances AB et AC , puis le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.
- Calculer $\cos(\widehat{AC; AB})$ et $\sin(\widehat{AC; AB})$.
- En déduire la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{AC; AB})$.
- Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par B et perpendiculaire à (AD) .
- Montrer que la distance du point A à la droite (D) est égale à $\sqrt{5}$.
- Montrer que le cercle (C) de centre A et tangent à la droite (D) admet pour équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.
- Déterminer une représentation paramétrique de (C) .
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) des points $M(x; y)$ tels que $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.
- Étudier l'intersection de (Γ) avec la droite (Δ) d'équation $y = -x + 4$.
- Résoudre graphiquement le système
$$\begin{cases} y < -x + 4 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 < 0 \end{cases}.$$

Exercice 3 — Médiatrices et centre du cercle circonscrit

★★★★★

On considère les points $A(-2; -1)$, $B(1; 8)$ et $C(5; 6)$.

- Déterminer les coordonnées des milieux I , J et K des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ respectivement.
- Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.
- Soit (D_1) la médiatrice du segment $[AB]$.
 - Donner un point de (D_1) et un vecteur normal à cette droite.
 - En déduire que les médiatrices (D_1) , (D_2) et (D_3) des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ ont pour équations

respectives $(D_1) : x + 3y - 10 = 0$, $(D_2) : 2x - y + 1 = 0$ et $(D_3) : x + y - 4 = 0$.

- c. Montrer que ces trois médiatrices sont concourantes en un point Ω dont on précisera les coordonnées.
- d. On admet que $\Omega(1; 3)$. Montrer que $\Omega A = \Omega B = \Omega C$ et interpréter ce résultat.

Exercice 4 — Hauteurs, orthocentre, aire

★★★★★

On considère à nouveau les points $A(-2; -1)$, $B(1; 8)$ et $C(5; 6)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.
2. Soit (D_A) la hauteur du triangle ABC issue de A .
 - a. Donner un point de (D_A) et un vecteur normal à cette droite.
 - b. En déduire que les hauteurs (D_A) , (D_B) et (D_C) , issues respectivement de A , B et C , ont pour équations $(D_A) : 2x - y + 3 = 0$, $(D_B) : x + y - 9 = 0$ et $(D_C) : x + 3y - 23 = 0$.
 - c. Montrer que ces trois hauteurs sont concourantes en un point H dont on précisera les coordonnées.
 - d. Que représente H pour le triangle ABC ?
3.
 - a. Montrer que $3x - y + 5 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (AB) .
 - b. Déterminer les coordonnées du point E , intersection des droites (D_C) et (AB) .
 - c. On admet que $E\left(\frac{4}{5}; \frac{37}{5}\right)$. Calculer l'aire du triangle ABC par deux méthodes différentes.

Exercice 5 — Résolution graphique de systèmes

★★★★★

Résoudre graphiquement les systèmes suivants, d'inconnue $(x; y) \in \mathbb{R}^2$:

1.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 < 0 \\ x + y - 2 > 0 \\ x - 2y + 4 > 0 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 < 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 < 0 \end{cases}$$

Exercice 6 — Cercle et tangentes

★★★★★

Soit (C) le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$.

1. Déterminer le centre Ω et le rayon R de (C) .
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de (C) avec l'axe des abscisses (on notera A celui d'abscisse négative).
3. Déterminer une équation cartésienne de chacune des tangentes à (C) en A et en B .
4. Déterminer les équations cartésiennes des tangentes à (C) de vecteur directeur $\vec{u}(4; 3)$, puis les coordonnées de leurs points de contact avec (C) .

Exercice 7 — Lignes de niveau

★★★★★

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 5$, et H le point de $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 10$. Déterminer, dans chacun des cas suivants, l'ensemble (Γ) des points M du plan vérifiant :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 10$;
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -5$.

Exercice 8 — Tangentes de direction donnée

★★★★★

Déterminer les équations cartésiennes des tangentes au cercle (C) d'équation $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ qui sont parallèles à la droite (D) d'équation $4x - 3y = 0$.

Exercice 9 — Tangentes issues d'un point

★★★★★

Vérifier que le point $A(3; 0)$ est extérieur au cercle (C) d'équation $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$, puis déterminer les équations cartésiennes des tangentes à (C) passant par A .

Exercice 10 — *Bissectrice d'un angle*

★★★★★

On considère les points $A(5; 2)$, $B(1; -1)$ et $C(1; 4)$.

1. Placer les points A , B et C , puis construire la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de cette bissectrice.

Exercice 11 — *Cercles soumis à des conditions*

★★★★★

1. Déterminer une équation cartésienne de chacun des cercles tangents à l'axe (Ox) et passant par les points $A(-1; 2)$ et $B(6; 9)$.
2. Déterminer les équations cartésiennes des cercles tangents à la droite (D) d'équation $x + y - 11 = 0$ et passant par les points $A(2; 5)$ et $B(-4; -1)$.

Exercice 12 — *Problème — cercle d'Euler*

★★★★★

On considère les points $A(-2; -1)$, $B(1; 8)$ et $C(5; 6)$.

1. Déterminer les coordonnées des milieux I , J et K des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ respectivement.
2. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de chacun des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.
3. Montrer que ces médiatrices sont concourantes en un unique point Ω .
4. Déterminer une équation cartésienne de chacune des hauteurs du triangle ABC .
5. Montrer que ces hauteurs sont concourantes en un unique point H .
6. Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC (on pourra utiliser les coordonnées du barycentre).
7. Montrer que $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$.
8. Déterminer les coordonnées des projetés orthogonaux H_1 , H_2 et H_3 de H sur les droites (AB) , (BC) et (CA) respectivement.
9. Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{E})$ circonscrit au triangle IJK .
10. Vérifier que H_1 , H_2 et H_3 appartiennent à $(\mathcal{E})$ et que le centre de $(\mathcal{E})$ est le milieu du segment $[\Omega H]$.

Exercice 13 — *Diamètre perpendiculaire à une droite*

★★★★★

Déterminer une équation cartésienne de la droite portant le diamètre du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$ qui est perpendiculaire à la droite d'équation $3x - 4y + 1 = 0$.

Exercice 14 — *Famille de droites*

★★★★★

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère la droite (D_m) d'équation $(1 - m^2)x + 2my + 5m^2 + 2m + 1 = 0$. Montrer qu'il existe un point M_0 équidistant de toutes les droites (D_m) .

Exercice 15 — *Cercles tangents à deux droites*

★★★★★

1. Déterminer les équations cartésiennes des cercles passant par l'origine O et tangents aux droites d'équations $x + 2y - 10 = 0$ et $2x - y - 5 = 0$.
2. Déterminer les équations cartésiennes des cercles passant par $A(3; 1)$ et tangents aux droites d'équations $4x + 3y - 15 = 0$ et $3x - 4y + 20 = 0$.