

Série d'exercices — Chapitre 05

Barycentre

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Consignes. (P) désigne le plan. Toute réponse doit être justifiée ; le symbole $\iff$ n'est employé que si chaque étape est réversible. Les constructions demandées se font à la règle et au compas, en justifiant la position des points par une relation vectorielle. Difficulté : de ★ à ★★★★★.

Exercice 1 — Construction, associativité, lieu

★★★★★

Soit ABC un triangle. On considère les points $K = \text{bar} \{(A; 3); (B; -1)\}$ et $I = \text{bar} \{(B; -1); (C; 4)\}$.

1. a. Construire les points K et I .
b. Construire le point $G = \text{bar} \{(A; 3); (B; -1); (C; 4)\}$.
2. À l'aide de l'associativité du barycentre, montrer que G est le milieu du segment $[AI]$.
3. a. À l'aide de la propriété caractéristique du barycentre, montrer que :
 $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
b. En déduire que les points C , K et G sont alignés.
4. Soit $F = \text{bar} \{(A; 3); (C; 4)\}$. Montrer que $G \in (BF)$.
5. En déduire que les droites (AI) , (CK) et (BF) sont concourantes et préciser leur point de concours.
6. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\| = 18$.

Exercice 2 — Barycentres de trois points, parallélogramme

★★★★★

Soit ABC un triangle. On considère les points $G = \text{bar} \{(A; 1); (B; 1); (C; 2)\}$, $H = \text{bar} \{(A; 5); (B; -3); (C; 2)\}$ et le milieu D du segment $[AB]$.

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AH} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
b. Construire les points H et D .
2. a. Écrire D comme barycentre des points A et B affectés de coefficients à préciser.
b. À l'aide de l'associativité du barycentre, montrer que G est le milieu de $[DC]$.
c. Placer le point G sur la figure.
3. a. À l'aide de la propriété caractéristique du barycentre G , montrer que $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
b. En déduire que $\overrightarrow{BG} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
c. Montrer que le quadrilatère $BGHA$ est un parallélogramme.
4. Soit E le milieu de $[AC]$. Montrer que les points H , E et G sont alignés.
5. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\|5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\|$.

Exercice 3 — Parallélisme, alignement, cercle

★★★★★

Soit ABC un triangle. On considère le point $G = \text{bar} \{(A; 1); (B; 4); (C; -2)\}$, le milieu I du segment $[AC]$ et le point K défini par $\overrightarrow{AK} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et que $\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire que $(BI) \parallel (AG)$.
3. a. Montrer que $K = \text{bar} \{(A; 1); (B; 4)\}$.
b. En déduire que les points C , K et G sont alignés.
4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = 15$.

Exercice 4 — Associativité

★★★★★

Soit ABC un triangle et G le barycentre des points pondérés $(A; 2)$, $(B; -3)$ et $(C; 5)$.

1. Construire le barycentre I des points pondérés $(B; -3)$ et $(C; 5)$.
2. Montrer que $G = \text{bar} \{(A; 1); (I; 1)\}$.

3. En déduire la position de G sur la droite (AI) .

Exercice 5 — Coordonnées du barycentre

★★★★★

- Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, placer les points $A(3; -1)$, $B(1; 2)$ et $C(-5; 4)$.
- Soit G le barycentre des points pondérés $(A; 2)$, $(B; 1)$ et $(C; 1)$.
 - Déterminer les coordonnées de G , puis le placer.
 - La droite (BG) passe-t-elle par l'origine du repère ?

Exercice 6 — Alignement et lieux géométriques

★★★★★

Soit ABC un triangle.

- Construire le point I tel que $\overrightarrow{BI} = -2\overrightarrow{BC}$.
 - Montrer que $I = \text{bar} \{(B; 3); (C; -2)\}$.
 - Montrer que $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
- Soit $G = \text{bar} \{(A; 1); (B; 3); (C; -2)\}$. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
- En déduire que les points A , I et G sont alignés.
 - Construire le point G .
- Déterminer l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :
 - $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}\|$;
 - $\|3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\| = 4$.

Exercice 7 — Barycentre de quatre points

★★★★★

Soit $ABCD$ un quadrilatère. On définit les points H , I et J par

$$\overrightarrow{CH} = 4\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AD}, \quad I = \text{bar} \{(A; 2); (C; -4)\}, \quad J = \text{bar} \{(B; -1); (D; 2)\}.$$

- Montrer que $H = \text{bar} \{(A; 2); (B; -1); (C; -4); (D; 2)\}$.
- À l'aide de l'associativité du barycentre, montrer que $H = \text{bar} \{(I; -2); (J; 1)\}$.
- En déduire que I est le milieu du segment $[JH]$.

Exercice 8 — Barycentre et paramètre

★★★★★

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(2; -1)$, $B(-1; 3)$ et $C(0; 2)$.

- Déterminer les coordonnées du barycentre G du système pondéré $\{(A; 3); (B; -2); (C; 1)\}$.
- Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère le barycentre G_m du système pondéré $\{(A; 2m+1); (B; 1-m); (C; -m)\}$.
 - Justifier l'existence de G_m pour tout $m \in \mathbb{R}$.
 - Déterminer les coordonnées de G_m en fonction de m .
 - Déterminer l'ensemble des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

Exercice 9 — Droites concourantes

★★★★★

Soit ABC un triangle et Y le milieu de $[AC]$.

- Placer, en justifiant les constructions, le barycentre U des points pondérés $(B; 3)$ et $(C; 1)$, puis le barycentre E des points pondérés $(A; 1)$ et $(B; 3)$.
- Soit $G = \text{bar} \{(A; 1); (B; 3); (C; 1)\}$. Montrer que G est aussi le barycentre des points pondérés $(E; 4)$ et $(C; 1)$.
- Démontrer que les droites (EC) , (BY) et (AU) sont concourantes.

Exercice 10 — Quadrilatère et barycentre

★★★★★

Soient a un réel non nul et $ABCD$ un quadrilatère non aplati tel que $\overrightarrow{CD} = a\overrightarrow{AB}$.

- Déterminer les réels b et c pour lesquels D est le barycentre du système pondéré $\{(A; 1); (B; b); (C; c)\}$.
- On suppose désormais que $a = -\frac{1}{2}$. Soient E le milieu de $[CD]$ et F le milieu de $[AE]$. Déterminer les réels x et y pour lesquels F est le barycentre du système pondéré $\{(A; x); (B; -1); (C; y)\}$.

Exercice 11 — *Barycentre et figure paramétrée*

★★★★★

Soit ABC un triangle et soit k un réel non nul. On définit les points D et E par $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB}$.

1. Réaliser une figure pour $k = \frac{1}{2}$, puis une autre pour $k = -2$.
2. Montrer que $D = \text{bar} \{(B; 1 - k); (C; k)\}$.
3. Montrer que $E = \text{bar} \{(A; 1 - k); (B; k)\}$.
4. En déduire que, pour tout point M du plan,

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{AC} = 2 \left(\overrightarrow{MC'} + k\overrightarrow{A'} \right),$$

où A' et C' sont les milieux respectifs de $[BC]$ et de $[AB]$.

5. Soit I le milieu de $[DE]$. Déduire de la question précédente que les points I , C' et A' sont alignés.

Exercice 12 — *Droites concourantes et centre de gravité*

★★★★★

Soit ABC un triangle de centre de gravité G . On définit les points I , J , M , N , R et S par

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BR} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{BS} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}.$$

Démontrer que les droites (IS) , (MR) et (NJ) sont concourantes en G .

Exercice 13 — *Parallélogramme et alignement*

★★★★★

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On définit les points M , N , R et S par

$$M = \text{bar} \{(A; 2); (D; 1)\}, \quad N = \text{bar} \{(A; 2); (C; 2); (D; 1)\}, \quad \overrightarrow{BR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BS} = \frac{5}{9}\overrightarrow{BN}.$$

1. Montrer que $S = \text{bar} \{(A; 1); (B; 1); (C; 1)\}$.
2. Montrer que les points M , S et R sont alignés.
3. Soient T et U les points définis par $\overrightarrow{CT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AU} = k\overrightarrow{AB}$, où $k \in [0; 1]$. Déterminer k pour que les points S , T et U soient alignés.

Exercice 14 — *Intersection de deux droites*

★★★★★

Soit $ABCD$ un parallélogramme et soit $\alpha \in]0; +\infty[$. On définit les points K et L par

$$\overrightarrow{DK} = (\alpha + 1)\overrightarrow{DB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CL} = \alpha\overrightarrow{BC}.$$

Soit M le point d'intersection des droites (CK) et (DL) . Montrer que $\overrightarrow{DM} = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + \alpha + 1}\overrightarrow{DL}$.