

Série d'exercices — Chapitre 04

Fonctions numériques

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Consignes. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Les variations s'étudient à l'aide de la définition ou du taux de variation (ni dérivées, ni limites) ; les tableaux de variations ne portent pas de valeurs aux bornes infinies. E désigne la fonction partie entière. Toute réponse doit être justifiée ; le symbole $\iff$ n'est employé que si chaque étape est réversible. Difficulté : de ★ à ★★★★★.

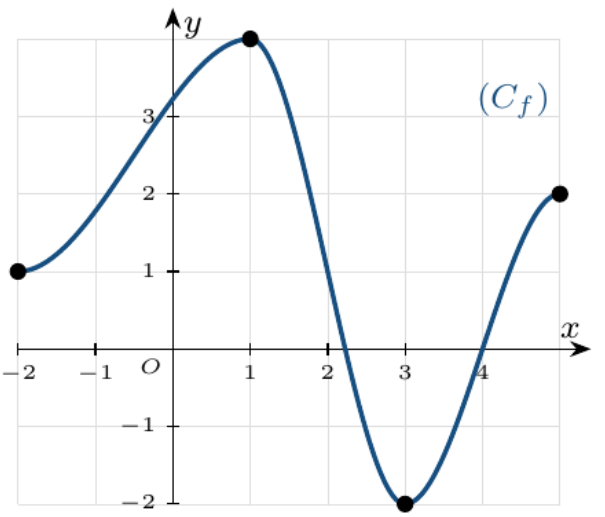
Exercice 1 — Ensemble de définition★★★★★

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a. $f(x) = \sqrt{3-x}$; b. $f(x) = \frac{1}{|x^2-2|-7}$; c. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-|x+1|}}$; d. $f(x) = \sqrt{x^2-4} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$.

Exercice 2 — Lecture graphique★★★★★

La courbe ci-dessous représente une fonction f .



- Déterminer l'ensemble de définition D_f .
- Déterminer graphiquement les extremums de f sur D_f et préciser où ils sont atteints.
- Déterminer graphiquement $f([-2; 1])$, $f([-2; 3])$, $f([1; 5])$ et $f([3; 5])$.
- Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 3 — Tableau de variations, parité★★★★★

Une fonction f définie sur $[-2; 3]$, strictement monotone sur chacun des intervalles $[-2; 0]$, $[0; 2]$ et $[2; 3]$, a pour tableau de variations :

x	-2	0	2	3
$f(x)$	-1	4	-1	2

- Déterminer les extremums de f sur $[-2; 3]$.
- Comparer $f(1)$ et $f\left(\frac{3}{2}\right)$.
- Déterminer $f([2; 3])$, $f([0; 2])$ et $f([-2; 3])$.

4. On note h la fonction paire définie sur $[-3; 3]$ qui coïncide avec f sur $[0; 3]$. Dresser le tableau de variations de h .

Exercice 4 — *Bornes, extremums, variations*

★★★★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1}$.

1. Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = 1 - \frac{3}{x^2 + 1}$.
2. Montrer que f est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$. Le réel 1 est-il le maximum de f ?
3. Montrer que f est minorée par -2 sur $\mathbb{R}$, et que -2 est le minimum de f .
4. Montrer que, pour tous réels distincts x et y : $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{3(x + y)}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$.
5. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+$ puis sur $\mathbb{R}_-$, et dresser son tableau de variations.

Exercice 5 — *Étude et composition*

★★★★★

Soient $f(x) = \sqrt{x + 3}$ et $g(x) = x^2 - 4x$.

1. Déterminer D_f et D_g .
2. Dresser les tableaux de variations de f et de g .
3. Montrer que g admet un minimum global que l'on précisera.
4. Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère.
5. Déterminer les points d'intersection de (C_g) avec les axes du repère.
6. Soit $\varphi(x) = x^2 - 4|x|$. Montrer que φ est paire et que $\varphi(x) = g(x)$ pour $x \geq 0$; tracer (C_f) , (C_g) et (C_φ) dans le même repère.
7. Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \geq 0$.
8. Discuter graphiquement, suivant les valeurs du réel m , le nombre de solutions de l'équation $g(x) = m$.
9. Soit $h = g \circ f$. Déterminer D_h et $h(x)$, puis étudier les variations de h sur $[-3; 1]$ et sur $[1; +\infty[$.

Exercice 6 — *Second degré, fonction impaire*

★★★★★

Partie A. Soit $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

1. Factoriser $f(x)$ et résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère.
3. Montrer que le taux de variation de f entre deux réels distincts x et y est $x + y - 2$.
4. En déduire les variations de f sur $]-\infty; 1]$ et sur $[1; +\infty[$.
5. Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
6. Préciser la nature de (C_f) et ses éléments caractéristiques.

Partie B. Soit $g(x) = \frac{3x}{|x| + 2}$.

1. Déterminer D_g .
2. Montrer que g est impaire.
3. Écrire $g(x)$ sans valeur absolue pour $x \in \mathbb{R}_+$, puis vérifier que $g(x) = 3 - \frac{6}{x + 2}$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+$.
5. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}_-$, puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
6. Tracer (C_f) et (C_g) dans le même repère.
7. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

Exercice 7 — *Périodicité*

★★★★★

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(4x - 1)$ est périodique de période $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 8 — Homographique et cube

★★★★★

Soient $f(x) = \frac{7x+10}{2x-1}$ et $g(x) = x^3$.

- Déterminer D_f et vérifier que $f(x) = \frac{7}{2} + \frac{27}{2(2x-1)}$; préciser la nature et les éléments caractéristiques de (C_f) .
- Dresser le tableau de variations de f .
- Dresser le tableau de variations de g .
- Vérifier que les points $A(-1; -1)$ et $B(2; 8)$ appartiennent à (C_f) et à (C_g) .
- Montrer que $(\forall x \in D_f) \quad f(x) - g(x) = \frac{-(x+1)(x-2)(2x^2+x+5)}{2x-1}$.
- Résoudre dans D_f l'inéquation $f(x) \leq -1$.
- Déterminer $f\left(\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]\right)$ et $f\left(\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)\right)$.
- Tracer (C_f) et (C_g) dans le même repère.
- Résoudre graphiquement, puis algébriquement, l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.
- Soit $h(x) = \left(\frac{7x+10}{2x-1}\right)^3$. Écrire h comme la composée de deux fonctions et déterminer D_h .
- Étudier les variations de h sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ et sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Exercice 9 — Racine, inverse, composée

★★★★★

Soient $f(x) = \frac{1}{x+3}$ et $g(x) = \sqrt{x+3}$.

- Déterminer D_f et D_g , puis les variations de f et de g .
- Vérifier que (C_f) et (C_g) se coupent au point $A(-2; 1)$.
- Tracer (C_f) et (C_g) dans le même repère.
- Résoudre dans $[-3; +\infty[$ l'inéquation $(x+3)\sqrt{x+3} \leq 1$.
- Soit $h = f \circ g$. Déterminer D_h et $h(x)$.
- Étudier les variations de h ; montrer que h est minorée par 0 et admet un maximum que l'on déterminera.

Exercice 10 — Changement d'écriture

★★★★★

Soit $f(x) = x - 4\sqrt{x+2} + 6$.

- Déterminer D_f .
- Vérifier que $(\forall x \in D_f) \quad f(x) = (\sqrt{x+2} - 2)^2$.
- Étudier les variations de f sur $[-2; 2]$ et sur $[2; +\infty[$; en déduire le minimum de f .

Exercice 11 — Problème de synthèse

★★★★★

Partie 1. Soit $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4}$.

- Déterminer D_f .
- Montrer que $(\forall x \in D_f) \quad f(x) \leq 3$ et que 3 est le maximum de f .
- Montrer que $(\forall x \in D_f) \quad f(x) \geq \frac{1}{3}$ et que $\frac{1}{3}$ est le minimum de f .
- Vérifier que $(\forall x \in D_f) \quad f(x) = 1 - \frac{4x}{x^2 + 2x + 4}$.
- Montrer que, pour $x \neq y$: $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{4(xy - 4)}{(x^2 + 2x + 4)(y^2 + 2y + 4)}$.
- En déduire les variations de f sur $[-2; 2]$ et sur $[2; +\infty[$.
- Dresser le tableau de variations de f sur $[-2; +\infty[$.

Partie 2. Soient $g(x) = \sqrt{x+2}$ et (D) la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$.

- Calculer $g(-2)$ et $g(2)$.
- Déterminer $g([-2; -1])$ et $g([2; +\infty[)$.
- Tracer (C_g) et (D) dans le même repère.
- Résoudre dans $[-2; +\infty[$ l'équation $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

5. Étudier la position relative de (C_g) et (D) sur $[-2; 2]$.

Partie 3. Soit $h(x) = \frac{x+6-2\sqrt{x+2}}{x+6+2\sqrt{x+2}}$.

1. Déterminer D_h et montrer que $h = f \circ g$.
2. En déduire les variations de h sur $[-2; 2]$ et sur $[2; +\infty[$.

Exercice 12 — *Bornes et composition*

★★★★★

Soit $f(x) = \frac{3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$.

1. Déterminer D_f et vérifier que $f(x) = 3 - \frac{8}{\sqrt{x}+3}$.
2. Montrer que f est majorée par 3 et minorée par $\frac{1}{3}$ sur D_f .
3. Soit $v(x) = \frac{3x+1}{x+3}$. Écrire f à l'aide de v et étudier les variations de f .

Exercice 13 — *Expression conjuguée*

★★★★★

Soit $f(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$.

1. Déterminer D_f .
2. Montrer que $(\forall x \in D_f) \quad f(x) = \frac{8}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}}$.
3. En déduire que $f(x) > 0$ pour tout $x \in D_f$.
4. Le réel 0 est-il le minimum de f sur D_f ? Justifier.
5. Montrer que f admet un maximum sur D_f que l'on déterminera.

Exercice 14 — *Étude complète, bijection*

★★★★★

Soit $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$.

1. Déterminer D_f et étudier la parité de f .
2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) \leq 1$.
3. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad f\left(\frac{4}{x}\right) = f(x)$.
4. L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle injective? surjective?
5. Montrer que, pour $x \neq y$: $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{4(4-xy)}{(x^2+4)(y^2+4)}$.
6. Étudier les variations de f sur $[0; 2]$ et sur $[2; +\infty[$, puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
7. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a+b \geq 2\sqrt{3}$. Montrer que $\frac{(a+b)^2+4}{a+b} \geq \frac{8\sqrt{3}}{3}$.
8. Soit g la restriction de f à $[2; +\infty[$. Montrer que g est une bijection de $[2; +\infty[$ vers $]0; 1]$ et déterminer $g^{-1}(y)$ pour $y \in]0; 1]$.

Exercice 15 — *Fonctions bornées*

★★★★★

1. Soit $f(x) = \frac{4\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}$. Déterminer D_f et vérifier que $f(x) = 4 - \frac{11}{\sqrt{x}+2}$.
2. Montrer que f est minorée par $-\frac{3}{2}$ et majorée par 4 sur D_f .
3. Soit $g(x) = \frac{x \cos x}{x^2+4}$. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \left| \frac{x}{x^2+4} \right| \leq \frac{1}{4}$, puis que g est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 — *Extremums*

★★★★★

Soit $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$.

1. Déterminer D_f .
2. Montrer que $-\frac{1}{2}$ est le minimum de f sur D_f .
3. Montrer que $\frac{1}{6}$ est le maximum de f sur D_f .

4. En déduire que $(\forall x \in D_f) |f(x)| \leq \frac{1}{2}$.
5. Interpréter graphiquement le résultat de la question 4.

Exercice 17 — *Partie entière, domaine*

★★★★★

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions :

1. $f(x) = \frac{1}{E(x) + 2}$;
2. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x - E(x)}}$.

Exercice 18 — *Équation avec partie entière*

★★★★★

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E\left(\frac{x+3}{4}\right) = \frac{x+1}{3}$.

Exercice 19 — *Partie entière, encadrements*

★★★★★

1. Montrer que la fonction $x \mapsto x - E(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $g(x) = \frac{x - E(x)}{\sqrt{x+1}}$. Déterminer D_g .
3. Montrer que $(\forall x \in D_g) \ 0 \leq g(x) < 1$.
4. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$: $E\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$ et $E\left(\frac{n}{2n+1}\right)$.

Exercice 20 — *Partie entière, périodicité*

★★★★★

Soit $f(x) = \frac{E(x) - x + 2}{x - E(x) + 1}$.

1. Déterminer D_f .
2. Montrer que f est périodique de période 1.
3. Écrire $f(x)$ sans partie entière pour $x \in [0; 1[$.
4. Tracer (C_f) sur $[-1; 3[$.

Exercice 21 — *Partie entière, tracé*

★★★★★

Soit $f(x) = E(x) + 1 - x$.

1. Montrer que f est périodique de période 1.
2. Écrire $f(x)$ sans partie entière pour $x \in [0; 1[$.
3. Tracer (C_f) sur $[-1; 2]$.

Exercice 22 — *Fonction « dents de scie »*

★★★★★

Soit $f(x) = (-1)^{E(x)}(2x - 2E(x) - 1) + 1$.

1. Montrer que f est périodique de période 2.
2. Écrire $f(x)$ sans partie entière pour $x \in [0; 1[$, puis pour $x \in [1; 2[$.
3. Tracer (C_f) sur $[-3; 5]$.

Exercice 23 — *Fonction bornée : caractérisation*

★★★★★

1. Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. Montrer que f est bornée sur D si et seulement s'il existe un réel $K \geq 0$ tel que $(\forall x \in D) |f(x)| \leq K$.
2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto x^2 - 6x + 1$ est minorée mais n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.