

Série d'exercices — Chapitre 03

Les applications

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Consignes. Sauf mention contraire, E , F et G désignent des ensembles non vides. Pour une partie A de E , on note $\bar{A} = E \setminus A$ et $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Toute réponse doit être justifiée ; le symbole $\Longleftrightarrow$ n'est employé que si chaque étape est réversible. Difficulté : de ★ à ★★★★★ ; les exercices 10 à 13 sont des **classiques** à connaître, les exercices 16 à 18 sont de haut niveau.

Exercice 1 — Bijection, réciproque

★★★★★

On considère l'application $f :]2; +\infty[\rightarrow]3; +\infty[$ définie par $f(x) = \frac{3x}{x-2}$.

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que f est surjective.
3. En déduire que f est bijective, puis déterminer sa bijection réciproque f^{-1} .

Exercice 2 — Image réciproque, image directe

★★★★★

On considère l'application $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}$.

1. a. Déterminer $f^{-1}(\{3; 1\})$.
b. L'application f est-elle surjective ? Justifier.
2. Montrer que $f(\mathbb{R}_+) = [-2; 3[$.
3. Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow [-2; 3[$ l'application définie par $g(x) = f(x)$.
a. Montrer que g est injective.
b. En déduire que g est bijective, puis déterminer g^{-1} .

Exercice 3 — Bijection, décomposition

★★★★★

On considère l'application $f : [2; +\infty[\rightarrow [4; +\infty[$ définie par $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

1. a. Montrer que f est injective.
b. Montrer que f est surjective.
c. En déduire que f est bijective, puis déterminer f^{-1} .
2. Soit $g : [-1; +\infty[\rightarrow [4; +\infty[$ l'application définie par $g(x) = \frac{x^2 + 6x + 13}{x + 3}$.
a. On considère $h : [-1; +\infty[\rightarrow [2; +\infty[$ définie par $h(x) = x + 3$. Montrer que $g = f \circ h$ et que h est bijective.
b. En déduire que g est bijective, puis déterminer g^{-1} .

Exercice 4 — Injectivité, surjectivité

★★★★★

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 2x + 2}$.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 1$.
b. L'application f est-elle injective ?
2. a. Montrer que $f(\mathbb{R}) \subset [0; 4]$.
b. L'application f est-elle surjective ?
3. Soit $g :]0; +\infty[\rightarrow]0; 2[$ l'application définie par $g(x) = f(x)$. Montrer que g est bijective, puis déterminer g^{-1} .

Exercice 5 — Application de deux variables

★★★★★

On pose $I = \mathbb{R}_+^*$. Soit $f : I^2 \rightarrow I^2$ l'application définie par $f(x; y) = \left(xy; \frac{4x}{y}\right)$.

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que f est bijective, puis déterminer f^{-1} .

Exercice 6 — *Restriction bijective*

★★★★★

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 4x - 1$.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -1$.
b. En déduire que f n'est pas injective.
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-5; +\infty[$.
3. Soit $g : [-2; +\infty[\rightarrow [-5; +\infty[$ l'application définie par $g(x) = f(x)$.
a. Montrer que g est bijective.
b. Déterminer sa bijection réciproque g^{-1} .

Exercice 7 — *Racines, bijection*

★★★★★

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + x$.

1. a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x < \sqrt{x^2 + 4}$.
b. En déduire que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\frac{x+y}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{y^2+4}} > -1$.
2. a. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x) - f(y) = (x - y) \left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{y^2+4}} + 1 \right)$.
b. En déduire que f est injective.
3. L'application f est-elle surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$? Justifier.
4. Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+$, puis déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 8 — *Non-injectivité*

★★★★★

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$.

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$.
2. L'application f est-elle injective?

Exercice 9 — *Application de $\mathbb{R}_+^2$*

★★★★★

Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ l'application définie par $f(x; y) = (x^2 - 4y^2; xy)$.

1. a. Soit $(a; b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Montrer, sans les calculer, que l'équation $X^2 - aX - 4b^2 = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}$ admet deux solutions de signes contraires.
b. En déduire que f est surjective, en étudiant aussi le cas $b = 0$.
2. L'application f est-elle injective?

Exercice 10 — *Classique — images directes et réciproques*

★★★★★

Soient $f : E \rightarrow F$ une application, M et N deux parties de E , P et Q deux parties de F . Démontrer que :

1. $M = \emptyset \iff f(M) = \emptyset$
2. $M \subset N \implies f(M) \subset f(N)$
3. $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$
4. $f(M \cap N) \subset f(M) \cap f(N)$
5. $f^{-1}(F) = E$
6. $P = \emptyset \implies f^{-1}(P) = \emptyset$
7. $P \subset Q \implies f^{-1}(P) \subset f^{-1}(Q)$
8. $f^{-1}(P \cup Q) = f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$
9. $f^{-1}(P \cap Q) = f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$
10. $M \subset f^{-1}(f(M))$
11. $f(f^{-1}(P)) \subset P$
12. $f(M) \setminus f(N) \subset f(M \setminus N)$

$$13. f^{-1}(P) \setminus f^{-1}(Q) = f^{-1}(P \setminus Q)$$

Exercice 11 — Classique — caractérisations

★★★★★

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Démontrer les équivalences suivantes :

1. f est injective $\iff$ pour toutes parties M, N de E : $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$.
2. f est injective $\iff$ pour toute partie M de E : $f^{-1}(f(M)) = M$.
3. f est surjective $\iff$ pour toute partie P de F : $f(f^{-1}(P)) = P$.
4. f est injective $\iff$ pour toutes parties M, N de E : $f(M \setminus N) = f(M) \setminus f(N)$.
5. f est bijective $\iff$ pour toute partie M de E : $f(E \setminus M) = F \setminus f(M)$.

Exercice 12 — Classique — fonction indicatrice

★★★★★

Soit E un ensemble non vide. Pour toute partie A de E , on appelle **indicatrice** de A l'application $\chi_A : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

1. Montrer que, pour toutes parties A, B de E : $A = B \iff \chi_A = \chi_B$.
2. Montrer que $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$.
3. Montrer que, pour toutes parties A, B de E :
 - a. $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$;
 - b. $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \chi_B$;
 - c. $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$;
 - d. $\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \chi_B = (\chi_A - \chi_B)^2$.
4. En déduire que, pour toutes parties A, B, C de E :
 - a. $\bar{A} \Delta B = A \Delta \bar{B}$;
 - b. $B \Delta A = C \Delta A \iff B = C$;
 - c. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$;
 - d. $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

Exercice 13 — Classique — composée

★★★★★

Soient $u : E \rightarrow F$ et $v : F \rightarrow G$ deux applications. Démontrer que :

1. si $v \circ u$ est injective, alors u est injective ;
2. si $v \circ u$ est injective et u surjective, alors v est injective ;
3. si $v \circ u$ est surjective, alors v est surjective ;
4. si $v \circ u$ est surjective et v injective, alors u est surjective.

Exercice 14 — Involution, translations

★★★★★

1. Soient E un ensemble non vide et B une partie fixée de E . Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ définie par $\varphi(X) = X \Delta B$ vérifie $\varphi \circ \varphi = \text{Id}_{\mathcal{P}(E)}$; en déduire qu'elle est injective et surjective, donc bijective. (On admet que Δ est associative et que $B \Delta B = \emptyset$.)
2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et $t_{\vec{u}}, t_{\vec{v}}$ les translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Déterminer $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ et $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$; ces deux applications sont-elles égales ?

Exercice 15 — Monotonie et injectivité

★★★★★

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que toute fonction f strictement décroissante sur I est injective sur I . La réciproque est-elle vraie ? (On pourra étudier $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.)

Exercice 16 — Équation fonctionnelle

★★★★★

On pose $I = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ et $g(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $x \in I$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que, pour tout $x \in I$: $f(x) + f(g(x)) = 2x$.

1. Vérifier que, pour tout $x \in I$, $g(x) \in I$.
2. Calculer $(g \circ g)(x)$ et $(g \circ g \circ g)(x)$ pour tout $x \in I$.

3. Montrer que, pour tout $x \in I$: $f(x) + f((g \circ g)(x)) = \frac{2x - 2}{x}$.
4. Exprimer $f(g(x)) + f((g \circ g)(x))$ en fonction de x .
5. En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x .

Exercice 17 — Équation fonctionnelle

★★★★★

On reprend $I = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ et $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que, pour tout $x \in I$:

$$f(x) + f(g(x)) = 2x + 2 + \frac{2}{1-x}.$$

1. Vérifier que, pour tout $x \in I$, $g(x) \in I$.
2. Calculer $(g \circ g)(x)$ et $(g \circ g \circ g)(x)$ pour tout $x \in I$.
3. Montrer que, pour tout $x \in I$: $f(x) + f((g \circ g)(x)) = 2(g \circ g)(x) + 2 + 2x$.
4. En déduire que, pour tout $x \in I$, $f(x) = 2x + 1$.

Exercice 18 — Injectivité sur $\mathbb{N}^2$

★★★★★

Soit $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ l'application définie par $f(n; m) = m + (n + m)(n + m + 2)$. Montrer que f est injective.