

Série d'exercices — Chapitre 02

Les ensembles

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Consignes. Dans les exercices 7, 8 et 15 à 20, E désigne un ensemble non vide et les complémentaires sont pris dans E (notés $\overline{A}$). On note $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Difficulté : de ★ à ★★★★★★ ; les exercices 16 à 20 sont de haut niveau.

Exercice 1 — Extension / compréhension

★★★★★

- Écrire en extension les ensembles suivants :
 $A = \{x \in \mathbb{Z} / |3x - 2| \leq 5\}$;
 $B = \{x \in \mathbb{Q} / (x^2 - 3)(|x| - 4) = 0\}$;
 $C = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 / x^2 - y^2 = 15\}$;
 $D = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 / 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.
- Écrire en compréhension les ensembles suivants :
 $E = \{1; 3; 9; 27; 81; \dots\}$;
 $F = \left\{ \dots; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2; 4; \dots \right\}$;
 G = ensemble des entiers relatifs multiples de 7.

Exercice 2 — Égalité d'ensembles

★★★★★

On pose $A = \{4n + 1 / n \in \mathbb{Z}\}$ et $B = \{4n' - 7 / n' \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $A = B$.

Exercice 3 — Opérations

★★★★★

On considère $E = \{1; 2; 3; \dots; 30\}$ et ses parties $A = \{x \in E / (\exists k \in E) x = 2k\}$ et $B = \{x \in E / (\exists k \in E) x = 5k\}$.

- Écrire E en compréhension, puis A et B en extension.
- Déterminer en extension $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$ et $\overline{A \cup B}$.
- Déterminer $\mathcal{P}(A \cap B)$.

Exercice 4 — Appartenance / inclusion

★★★★★

Soit $E = \{a; b; c\}$. Parmi les propositions suivantes, déterminer celles qui sont vraies (justifier brièvement) :
 $b \in E$; $b \subset E$; $\{b\} \in E$; $\{b\} \subset E$; $\{b\} \subset \mathcal{P}(E)$; $\{b\} \in \mathcal{P}(E)$; $\emptyset \in E$; $\emptyset \subset E$; $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$; $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(E)$;
 $E \in \mathcal{P}(E)$; $E \subset E$; $\{a; c\} \in \mathcal{P}(E)$; « $b \in E$ et $c \notin E$ » ; $(a; c) \in E \times E$.

Exercice 5 — Opérations

★★★★★

On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ et ses parties :

$$A = \{2; 3; 5; 6; 8; 11; 12\},$$

$$B = \{1; 3; 4; 6; 7; 8; 10\}$$

$$\text{et } C = \{2; 3; 10\}.$$

Déterminer les ensembles suivants :

$$A \cap B; A \cap C; A \cup B; A \setminus B; B \setminus A; \mathcal{P}(C); \mathbb{C}_E A; \mathbb{C}_E B; \mathbb{C}_E(A \cap B); \mathbb{C}_E A \cup \mathbb{C}_E B; \mathbb{C}_E(A \cup B); \mathbb{C}_E A \cap \mathbb{C}_E B;$$

$$B \cup C; A \cap (B \cup C); (A \cap B) \cup (A \cap C). \text{ Que constate-t-on ?}$$

Exercice 6 — Dédution

★★★★★

Soient $E = \{p; q; r; s; t; u\}$ et A, B deux parties de E telles que : $A \cap B = \{p; q\}$; $A \setminus B = \{r; s\}$;
 $A \cup B = \{p; q; r; s; t\}$. Déterminer $A, B, B \setminus A, A \Delta B$ et $\overline{A \Delta B}$.

Exercice 7 — Classique — double implication

★★★★★

Soient A, B, C et D des parties de E . Montrer les propriétés suivantes :

1. $A \subset \overline{B} \iff B \subset \overline{A}$
2. $A \cup B \subset A \cap B \iff A = B$
3. $A \cap B = E \iff (A = E \text{ et } B = E)$
4. $A \cap B = A \cup C \iff C \subset A \subset B$
5. $A \setminus B = A \iff A \cap B = \emptyset$
6. a. $\overline{A} \cup B = E \iff A \subset B$; b. $A \cap \overline{B} = \emptyset \iff A \subset B$
7. $\begin{cases} \overline{A} \cup B = \overline{A} \cup C \\ \overline{A} \cap B = \overline{A} \cap C \end{cases} \iff B = C$
8. a. $A \cup B = A \cup C \iff A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}$; b. $A \cap B = A \cap C \iff \overline{A} \cup B = \overline{A} \cup C$
9. $B \cap (A \Delta B) = B \setminus A$ et $\overline{A} \Delta B = A \Delta \overline{B}$
10. $A \Delta C = B \Delta C \iff A = B$ (on pourra utiliser $X \Delta X = \emptyset$, $X \Delta \emptyset = X$ et le résultat admis ici : Δ est associative, c'est-à-dire $(X \Delta Y) \Delta Z = X \Delta (Y \Delta Z)$; il sera démontré à l'exercice 8)
11. $A \Delta B = A \cup B \iff A \cap B = \emptyset$
12. $A \Delta B = E \iff B = \overline{A}$
13. $\begin{cases} B \subset A \\ C = A \setminus B \end{cases} \implies B = A \setminus C$
14. $\begin{cases} (A \setminus B) \subset D \\ (B \setminus C) \subset D \end{cases} \implies (A \setminus C) \subset D$
15. Si $B \neq \emptyset$, alors $A \times B \subset C \times B \implies A \subset C$.
16. $A \times B = B \times A \iff (A = B \text{ ou } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset)$

Exercice 8 — Classique — égalités

★★★★★

Soient A, B, C et D des parties de E . Montrer les propriétés suivantes :

1. $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$
2. $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$
3. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$
4. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
5. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
6. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
7. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
8. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) = (A \setminus C) \setminus B$
9. $A \cap B = (A \cup B) \Delta (A \Delta B)$
10. $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$
11. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$
12. $(A \cup C) \Delta (B \cup C) = (A \Delta B) \cap \overline{C}$
13. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
14. $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$
15. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
16. $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$
17. $E^2 \setminus (A \times B) = (\overline{A} \times E) \cup (E \times \overline{B})$

Exercice 9 — Ensembles de réels

★★★★★

On considère les ensembles $A = \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $B = \left\{ -\frac{\pi}{10} + \frac{k'\pi}{5} \mid k' \in \mathbb{Z} \right\}$.

1. Vérifier que $\frac{\pi}{10} \in B$.
2. Le nombre $\frac{3\pi}{10}$ appartient-il à A ?
3. Montrer que $A \subset B$ et $B \not\subset A$.

Exercice 10 — *Extension / différence symétrique*

★★★★★

On pose $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \setminus \{3\} / \frac{2x+5}{x-3} \in \mathbb{Z} \right\}$ et $B = \left\{ x \in \mathbb{N} \setminus \{2\} / \frac{4x+1}{x-2} \in \mathbb{N} \right\}$.

1. Écrire A et B en extension.
2. Déterminer $A \Delta B$.
3. On considère $C = \{4; 5; 6\}$. Vérifier que $(C \cup A) \Delta (C \cup B) \neq C \cup (A \Delta B)$.

Exercice 11 — *Paramètre*

★★★★★

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $E = [-3; 3]$, $F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 4y^2 \leq 9\}$, $G = \{x \in \mathbb{R} / |x - 2| < \alpha\}$ et $H = \left\{ x \in \mathbb{R} / |x + 1| < \frac{5}{2} \right\}$.

1. a. Montrer que $F \neq \emptyset$ et $G \neq \emptyset$.
b. Montrer que $F \subset E^2$.
2. Déterminer, si elles existent, les valeurs de α telles que : a. $G = H$; b. $G \cap H = \emptyset$.

Exercice 12 — *Ensembles de réels*

★★★★★

1. Déterminer l'ensemble $[-2\pi; 3\pi] \cap \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$.
2. On considère $A = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $B = \left\{ -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\}$. Montrer que $A \subset B$.
3. On considère $C = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $D = \left\{ -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\}$. Montrer que $C \cap D = \emptyset$.

Exercice 13 — *Divisibilité*

★★★★★

Déterminer en extension les ensembles $A = \left\{ x \in \mathbb{N} / \frac{4x^2 + 2x + 9}{2x - 1} \in \mathbb{Z} \right\}$ et $B = \left\{ x \in \mathbb{N} \setminus \{4\} / \frac{x+8}{x-4} \in \mathbb{N} \right\}$, puis déterminer $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \setminus B$.

Exercice 14 — *Partie de $\mathbb{R}^2$*

★★★★★

On considère l'ensemble $F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \leq 2y \text{ et } y^2 < 2x\}$.

1. Montrer que $F \neq \emptyset$.
2. Montrer que $F \subset [0; 2] \times [0; 2]$.

Exercice 15 — *Ensemble des parties*

★★★★★

Soient E et F deux ensembles. Montrer que :

1. $E \subset F \iff \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.
2. $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$, et que cette inclusion peut être stricte.

Exercice 16 — *Partie de $\mathbb{R}^2$*

★★★★★

Soit $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - xy - 2y^2 = 4\}$.

1. Vérifier que : $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \quad x^2 - xy - 2y^2 = (x - 2y)(x + y)$.
2. Déterminer en extension l'ensemble $F = E \cap \mathbb{Z}^2$.
3. Montrer que $E = \left\{ \left(\frac{t^2 + 8}{3t} ; \frac{4 - t^2}{3t} \right) / t \in \mathbb{R}^* \right\}$.

Exercice 17 — *Inclusions*

★★★★★

Soient $A, X, Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $X \cup A = Y \cap A$. Montrer que $X \subset A \subset Y$.

Exercice 18 — *Équations dans $\mathcal{P}(E)$*

★★★★★

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ les équations suivantes :

1. $X \cup \overline{A} = B$

$$2. X \cap \overline{A} = B$$

Exercice 19 — Équations dans $\mathcal{P}(E)$

★★★★★

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \subset B$. Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, montrer que :

1. $A \cup X = B \iff B \setminus A \subset X \subset B$
2. $B \setminus X = A \iff B \setminus A \subset X \subset \overline{A}$

Exercice 20 — Problème de synthèse

★★★★★

Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$:
 - a. $X = (X \setminus A) \cup (X \cap A)$; b. $X = (X \cup A) \setminus (A \setminus X)$.
2. Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation $X \cap A = X \cup \overline{A}$ (discuter selon A).
3. On suppose que $B \subset A$ et $A \cap C = \emptyset$. Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ le système $\begin{cases} X \cap A = B \\ X \setminus A = C \end{cases}$.
4. Sachant que $A \subset B$, résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation $X \setminus A = B \setminus A$.
5. On suppose que $B \subset A \subset C$.
 - a. Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ le système $\begin{cases} A \cup X = C \\ A \cap X = B \end{cases}$.
 - b. Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ le système $\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \cup A = C \end{cases}$.