

Série d'exercices — Chapitre 01

Notions de logique

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Consignes. Sauf mention contraire, a, b, c, x, y, z désignent des réels et n, m des entiers naturels; l'ensemble de chaque variable est précisé dans l'énoncé. La négation de P est notée $\overline{P}$. Difficulté : de ★ (application directe) à ★★★★★ (niveau olympiade). Les exercices 1 à 17 suivent l'ordre du cours; les exercices 18 à 30 sont des exercices de synthèse de haut niveau.

Exercice 1 — Quantificateurs

★★★★★

Écrire les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs et des connecteurs logiques :

- P : « Pour tout entier naturel n , il existe un entier naturel m tel que $m - n = 4$. »
- Q : « Il existe un réel m tel que, pour tout réel x , on ait $x \geq m$. »
- R : « Il existe un entier relatif dont le carré vaut 3. »
- S : « L'équation $x^2 = 3$ n'admet aucune solution rationnelle. »
- T : « Entre deux réels distincts, il existe toujours un nombre décimal. »

Exercice 2 — Négation

★★★★★

Pour chacune des propositions suivantes, écrire sa négation puis préciser si la proposition initiale est vraie ou fausse (justifier) :

$$P_1 : (\forall x \in \mathbb{R}) \sqrt{(x-1)^2} = x-1; \quad P_2 : (\forall x \in \mathbb{R}_+) x^2 - 2x - 3 \leq 0; \quad P_3 : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) y > x+1;$$

$$P_4 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) y > x+1; \quad P_5 : (\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*) x^2 + y^2 \neq 2; \quad P_6 : (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) y \neq \cos(x).$$

Exercice 3 — Négation d'un énoncé

★★★★★

Écrire en français la négation de chacune des propositions suivantes :

- P : « Tous les élèves de la classe ont rendu leur devoir. »
- Q : « Certains nombres réels sont négatifs. »
- R : « Tout entier naturel divisible par 4 est divisible par 8. »

Exercice 4 — Négation

★★★★★

Déterminer la négation de chacune des propositions suivantes :

- P : $(\forall x \in \mathbb{R}) (x = 1 \text{ ou } x > 20)$;
- Q : $(\exists x \in \mathbb{R}) (x^2 < 30 \text{ et } x \in \mathbb{N})$;
- R : $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) [x > y + 2 \iff (x - y)^2 \geq x^2 + y^2]$;
- S : « $a < b \implies a \geq c$ », où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 — Lois logiques

★★★★★

Soient P, Q et R trois propositions. Dresser le tableau de vérité de chacune des propositions suivantes, puis montrer que ce sont des lois logiques :

1. $\overline{P \text{ et } Q} \iff (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$
2. $\overline{P \text{ ou } Q} \iff (\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$
3. $\overline{P \implies Q} \iff (P \text{ et } \overline{Q})$
4. $(P \iff Q) \iff (\overline{P} \iff \overline{Q})$
5. $\overline{P \iff Q} \iff (\overline{P} \iff Q)$
6. $[(P \implies Q) \text{ et } \overline{Q}] \implies \overline{P}$
7. $[(P \implies Q) \text{ et } (P \implies R)] \iff [P \implies (Q \text{ et } R)]$

Exercice 6 — *Négation*

★★★★★

Soient a, b et c des réels. Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

- $R_1 : a \leq b \implies a > c$;
- $R_2 : a = b = c$;
- $R_3 : a < b \leq c$;
- $R_4 : (\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \ 0 \leq x - y \leq 3 \implies |x - y| \leq 3$;
- $R_5 : (\forall x \in \mathbb{R}^*) (\forall y \in \mathbb{R}^*) \ x + y = 2 \iff y < 1$;
- $R_6 : (\forall x \in \mathbb{R}) \ x \geq 1 \text{ ou } x \leq 1$;
- $R_7 : (\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}) (\exists x \in \mathbb{R}) \ \cos(x) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin(x) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Exercice 7 — *Rais. par contre-exemple*

★★★★★

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes, en justifiant :

1. Tout nombre premier impair s'écrit sous la forme $4k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$.
2. Tout entier naturel dont l'écriture décimale se termine par 7 est premier.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $n^2 - n + 17$ est premier.
4. $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \ 2x - 3y = 5$
5. $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \ |x - y| = |x| - |y|$
6. $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \ \cos(x - y) = \cos(x) - \cos(y)$
7. $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \ \sin(x - y) = \sin(x) - \sin(y)$
8. $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) \ x^2 + 2xy + 2y^2 = 0$

Exercice 8 — *Rais. direct*

★★★★★

Démontrer les implications suivantes par un raisonnement direct :

1. $(\forall x \in \mathbb{R}) \ |x| \leq 1 \implies |2x - 3| \leq 5$
2. $(\forall x \in \mathbb{R}) \ x > 0 \implies x + \frac{4}{x} \geq 4$
3. $(\forall x \in \mathbb{R}) \ x > 2 \implies x^2 - x - 2 > 0$
4. $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \ xy + 2 = 2x + y \implies (x = 1 \text{ ou } y = 2)$
5. $(\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2) \ (a \in \mathbb{Q} \text{ et } b \in \mathbb{Q}) \implies ab \in \mathbb{Q}$
6. $(\forall a \in \mathbb{R}^*) (\forall (b; c) \in \mathbb{R}^2) \ ac < 0 \implies \text{l'équation } ax^2 + bx + c = 0 \text{ admet deux solutions réelles distinctes.}$

Exercice 9 — *Rais. par contraposée*

★★★★★

Démontrer les implications suivantes par contraposée :

1. $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \ x \neq y \implies (x + 2)(y - 2) \neq (x - 2)(y + 2)$
2. $(\forall x \in \mathbb{R}_+) \ x \neq 0 \implies \sqrt{1 + 2x} \neq 1 + x$
3. $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2) \ x \neq y \implies \frac{x - 1}{x + 1} \neq \frac{y - 1}{y + 1}$
4. $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \ (x \neq y \text{ et } xy \neq 1) \implies \frac{x}{x^2 + 1} \neq \frac{y}{y^2 + 1}$
5. $(\forall x \in \mathbb{R}) \ x^2 - 3x + 2 < 0 \implies x < 2$
6. $(\forall n \in \mathbb{N}) \ n^3 \text{ est impair} \implies n \text{ est impair}$
7. $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \ (x \neq y \text{ et } x + y \neq -4) \implies x^2 + 4x \neq y^2 + 4y$
8. $(\forall (x; y; z) \in \mathbb{R}^3) \ x + 2y \leq 3z \implies (x \leq z \text{ ou } y \leq z)$

Exercice 10 — *Rais. par équivalences*

★★★★★

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+ : \sqrt{x + 5} = 1 + \sqrt{x} \iff x = 4$.
2. Montrer que, pour tout $x \in [2; +\infty[: \frac{\sqrt{x - 2}}{x} \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$.
3. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R} : |x - y| = |x| + |y| \iff xy \leq 0$.
4. Montrer que, pour tout $x \in [-3; 3] : \sqrt{9 - x^2} \leq x + 3\sqrt{2}$.

Exercice 11 — Rais. par disjonction des cas

★★★★★

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-x^2 + |x - 2| + 4 = 0$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x^2 + 4} + x > 0$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $n(5n + 3)$ est pair.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 1$.
5. Soit $m \in \mathbb{R}^*$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $mx^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n(n^2 + 2)$ est divisible par 3.

Exercice 12 — Rais. par l'absurde

★★★★★

1. Soit $a > 0$ et soit ABC un triangle tel que $AB = 5a$, $BC = 6a$ et $CA = 8a$. Montrer que ABC n'est pas rectangle.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $ab = 4$. Montrer que $a \leq 2$ ou $b \leq 2$.
3. Soient $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $2a + 3b\sqrt{2} = 0$. Montrer que $a = 0$ et $b = 0$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$. On admet que : si $\text{PGCD}(p; q) = 1$, alors $\text{PGCD}(p^2; q^2) = 1$; si $p \mid qr$ et $\text{PGCD}(p; q) = 1$, alors $p \mid r$; et $\text{PGCD}(n + 1; n + 2) = 1$.

Exercice 13 — Rais. par récurrence

★★★★★

Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^n (2k - 1)^2 = \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}$
2. $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{k=0}^n 5^k = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$
3. $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^n (2k - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$
4. $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{k=0}^n (4k + 1) = (n + 1)(2n + 1)$
5. $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3^n > 2n$
6. $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 4^n \geq 3n + 1$
7. $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k - 1)(2k + 1)} = \frac{n}{2n + 1}$. Donner aussi une démonstration sans récurrence.
8. $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \times 2^n}$
9. $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^n k(k + 2) = \frac{n(n + 1)(2n + 7)}{6}$
10. $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left(\frac{4}{3}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{3}$
11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $7^n - 1$ est divisible par 6.

Exercice 14 — Absurde / contraposée

★★★★★

1. Montrer que le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 + x + 3$ n'admet aucune racine dans $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\sqrt{4 + x^2} \neq 2 + \frac{x^2}{4}$.
3. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x + y + z > \frac{3}{2}$. Montrer que $x > \frac{1}{2}$ ou $y > \frac{1}{2}$ ou $z > \frac{1}{2}$.
4. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que : $\left|\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right| \neq 2 \implies \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \neq 2\sqrt{2}$.
5. Sachant que $\sqrt{15} \notin \mathbb{Q}$, montrer que $\sqrt{3} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 15 — Raisonnements variés

★★★★★

1. Montrer que la proposition $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad x + \frac{4}{x} \geq 4$ est fausse.
2. Soient a et b deux réels positifs ou nuls.

- a. Montrer que $\frac{a}{\sqrt{a^2+4}} < \frac{b}{\sqrt{b^2+4}} \iff a < b$.
- b. Montrer que $a\sqrt{a^2+4} = b\sqrt{b^2+4} \iff a = b$.
3. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $|x^2 + 3xy + 2y^2| \leq 4 \implies (|x + y| \leq 2 \text{ ou } |x + 2y| \leq 2)$.
4. a. Montrer que tout entier naturel n non divisible par 3 s'écrit $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$, avec $k \in \mathbb{N}$.
b. En déduire que, si l'entier $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 3, alors n est divisible par 3.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sqrt{n^2 + 4n} \notin \mathbb{N}$ et $\sqrt{\frac{n}{n+4}} \notin \mathbb{Q}$. On admet que si $\frac{a}{b}$ est irréductible, alors $\frac{a^2}{b^2}$ est irréductible.

Exercice 16 — *Raisonnements variés*

★★★★★

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11.
2. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $5 \mid n^2 \implies 5 \mid n$.
b. En déduire que $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 2$. Montrer que $|a + b| \leq 2$.
4. Soient a et b des réels.
a. Montrer que $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.
b. Montrer que $a^3 + 2a = b^3 + 2b \iff a = b$.
5. Soient a et b deux réels tels que $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*) \quad a \leq b + \varepsilon$. Montrer par l'absurde que $a \leq b$.

Exercice 17 — *Loi logique sans tableau*

★★★★★

Sans utiliser de tableau de vérité, montrer que la proposition $[(P \text{ ou } Q) \implies R] \iff [(P \implies R) \text{ et } (Q \implies R)]$ est une loi logique.

Exercice 18 — *Récurrence (synthèse)*

★★★★★

Démontrer les propriétés suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
2. $2^{5n+3} + 17 \times 7^n$ est divisible par 25.
3. $2 \times 3^{2n} + 2^{6n-4}$ est divisible par 11.
4. $3^{3n+1} + 2^{3n+4}$ est divisible par 19.
5. $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \leq 4 - \frac{4}{n+1}$
6. $2\sqrt{n+1} - 2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$
7. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$
8. $\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$
9. $\sum_{k=1}^n (k-1)k^2 = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{12}$

Exercice 19 — *Récurrence*

★★★★★

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists (a_n; b_n) \in \mathbb{N}^2) \quad (1 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$.
2. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n .
3. Calculer $(1 + \sqrt{3})^5$.

Exercice 20 — *Inégalité d'olympiade*

★★★★★

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a - b) \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1}$.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x^{n+2} + y^{n+2} \geq x^n y^2 + x^2 y^n$.

Exercice 21 — *Récurrence / inégalités*

★★★★★

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2^{n-1}(x^n + y^n) \geq (x + y)^n$.
2. On suppose que $x + y = 2$.
 - a. Montrer que $xy \leq 1$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n + y^n \geq 2$.
 - b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)\left(1 + \frac{1}{y^n}\right) \geq 4$.

Exercice 22 — *Rais. par l'absurde*

★★★★★

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'entier $n(n+2)$ n'est pas le carré d'un entier, puis que $\sqrt{\frac{n+2}{n}} \notin \mathbb{Q}$ (on pourra utiliser l'admis de l'exercice 15).
2. En déduire que, si $a, b \in \mathbb{N}$ vérifient $a > 2b > 0$, alors $\frac{a^2 + 4b^2}{a^2 - 4b^2} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 23 — *Rais. par l'absurde*

★★★★★

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+3}{n+5} \notin \mathbb{N}$.
2. Soient a et b deux rationnels tels que $a \neq 2b$. Montrer que $\frac{a + b\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2 + 3n + 3} \notin \mathbb{N}$.
4. Soit $a \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sqrt{a^2 + \sqrt{9a^2 + \sqrt{36a^2 + 12a + 2}}} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 24 — *Double implication*

★★★★★

Soient a, b et c des réels.

1. Montrer que : $|a + b| + |a - b| \leq 2c \implies (|a| \leq c \text{ et } |b| \leq c)$.
2. Montrer que : $(|a| \leq c \text{ et } |b| \leq c) \implies |a + b| + |a - b| \leq 2c$.

Exercice 25 — *Synthèse*

★★★★★

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in [-2; 2]$, $|ax^2 + bx + c| \leq 1$.

1. Montrer que $|c| \leq 1$, $|4a + 2b + c| \leq 1$ et $|4a - 2b + c| \leq 1$.
2. En déduire que $|4a + c| \leq 1$ et $|a| \leq \frac{1}{2}$.
3. a. Montrer que : $2(16a^2 + 4b^2 + c^2) \leq (4a + 2b + c)^2 + (4a - 2b + c)^2 + 16|ac|$.
b. En déduire que $16a^2 + 4b^2 + c^2 \leq 5$.

Exercice 26 — *Contraposée / absurde*

★★★★★

Soient a, b et c des entiers relatifs, tous différents de 2. Montrer que :

$$\begin{cases} 2(a+b) \leq ab+3 \\ 2(b+c) \leq bc+3 \end{cases} \implies 2(c+a) \leq ca+3.$$

Exercice 27 — *Raisonnement au choix*

★★★★★

Soient $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ tels que $a^2 b < c$. Montrer que $a + b \leq c$.

Exercice 28 — *Inégalités*

★★★★★

Soient a , b et c les longueurs des côtés d'un triangle, avec $a + b + c = 2$. Montrer que $\frac{4}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2$.

Exercice 29 — *Équivalence en géométrie*

★★★★★

Soit EFG un triangle isocèle en F . Soient M un point du segment $[FE]$ et N un point du segment $[EG]$ tels que $(MN) \parallel (FG)$. Soit P un point du segment $[FG]$. Montrer que $(NP) \parallel (EF) \iff EM = FP$.

Exercice 30 — *Inégalité d'olympiade*

★★★★★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$. On admet l'inégalité : $\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^n \geq n^n \prod_{i=1}^n x_i$.

1. En déduire que, pour tous $x, y, z, t \in \mathbb{R}_+$: $(x + y + z + t)^4 \geq 256 x y z t$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\prod_{k=1}^n (2k - 1) \leq n^n$.