

Devoir surveillé n° 4 — Durée : 2 heures

Géométrie de l'espace (Ch. 15 à 17)

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — consignes et barème

Durée : 2 heures. Calculatrice non programmable autorisée. Le soin et la rédaction sont pris en compte ; on annoncera la méthode utilisée. Barème indiqué entre crochets : exercice 1 sur 5 points, exercice 2 sur 7 points, exercice 3 sur 8 points ; total sur 20. Deux questions **bonus** (+0,5 pt chacune) figurent à la fin ; la note est plafonnée à 20. Programme : chapitres 15 (vecteurs de l'espace), 16 (analytique de l'espace) et 17 (produit scalaire dans l'espace).

Exercice 1 — Vecteurs de l'espace dans un cube — 5 points

★★★★★

Soit $ABCDEFGH$ un cube ($ABCD$ et $EFGH$ faces opposées, (AE) , (BF) , (CG) , (DH) arêtes parallèles). On note M le milieu de $[CG]$ et L le point défini par $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

- Montrer que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. [0,5 pt]
- Montrer que L est le centre de gravité du triangle BDE . [1 pt]
 - En déduire que la droite (AG) coupe le plan (BDE) en L . [0,5 pt]
- On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.
 - Donner les coordonnées de B , D , E , M , puis montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AM}$ ne sont pas coplanaires. [1 pt]
 - Déterminer une équation cartésienne du plan (BDE) , puis les coordonnées du point N d'intersection de la droite (AM) et du plan (BDE) . [1 pt]
- Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $\vec{u}_m = m\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + (m-1)\overrightarrow{AE}$. Déterminer les réels m pour lesquels $\vec{u}_m$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont coplanaires. [1 pt]

Exercice 2 — Plan, tétraèdre, famille de plans — 7 points

★★★★★

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(0; 2; 1)$ et $D(3; 3; 3)$.

- Montrer que A , B , C ne sont pas alignés, calculer $\cos \widehat{BAC}$ et en déduire la nature du triangle ABC . [1,5 pt]
- Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; en déduire une équation cartésienne du plan (ABC) et l'aire du triangle ABC . [1,5 pt]
- Soit (Δ) la droite passant par D et orthogonale au plan (ABC) .
 - Donner une représentation paramétrique de (Δ) et déterminer les coordonnées du point H d'intersection de (Δ) et (ABC) . [0,75 pt]
 - Vérifier que H est le centre de gravité du triangle ABC et calculer $d(D; (ABC))$. [0,75 pt]
 - En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$. [0,5 pt]
- Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on note (P_m) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $(m+1)x + (m-1)y - 2mz = 0$.
 - Montrer que (P_m) est un plan perpendiculaire au plan (ABC) . [0,5 pt]
 - Montrer que la droite (Δ) est incluse dans (P_m) pour tout $m \in \mathbb{R}$. [0,5 pt]
 - Déterminer le réel m tel que $A \in (P_m)$. [0,5 pt]
 - Existe-t-il un réel m tel que (P_m) contienne à la fois A et B ? Justifier. [0,5 pt]

Exercice 3 — Sphère, plans et droites — 8 points

★★★★★

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$, et (P) le plan d'équation $2x + y - 2z + 3 = 0$.

1. Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R . [1 pt]
2. Montrer que (P) coupe (S) selon un cercle dont on déterminera le centre H et le rayon r . [2 pts]
3. Vérifier que $A(1; 1; 3) \in (S)$ et donner une équation cartésienne du plan (T) tangent à (S) en A . [1 pt]
4. Soit (D) la droite de représentation paramétrique $x = 1 + t, y = 1 + t, z = 3 - t$ ($t \in \mathbb{R}$). Déterminer $(D) \cap (S)$. On notera A' le point d'intersection distinct de A . [1,5 pt]
5. Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère le plan $(Q_m) : x + y + z + m = 0$. Discuter, selon les valeurs de m , la position relative de (Q_m) et (S) . [1,5 pt]
6. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = 0$. [1 pt]

Exercice 4 — Questions bonus (+0,5 pt chacune)

★★★★★

1. Avec les points A, B, C de l'exercice 2, déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 18$. [+0,5 pt]
2. Avec les notations de l'exercice 3, déterminer les réels m pour lesquels $(Q_m) \cap (S)$ est un cercle de rayon $\sqrt{6}$, et donner alors le centre de ce cercle. [+0,5 pt]