

Devoir surveillé n° 3 — Durée : 2 heures

Dénombrement — Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — consignes et barème

Durée : 2 heures. Calculatrice non programmable autorisée. Le soin et la rédaction sont pris en compte ; on précisera le type de raisonnement utilisé et on écrira « divise » en toutes lettres. Barème indiqué entre crochets : exercice 1 sur 6 points, exercice 2 sur 6 points, exercice 3 sur 8 points ; total sur 20. Deux questions **bonus** (+0,5 pt chacune) figurent à la fin ; la note est plafonnée à 20. Programme : chapitres 13 (dénombrement) et 14 (arithmétique dans $\mathbb{Z}$).

Exercice 1 — PGCD, PPCM, diviseurs — 6 points

★★★★★

On pose $a = 3500$ et $b = 2200$, et on note $a \wedge b = \text{PGCD}(a; b)$, $a \vee b = \text{PPCM}(a; b)$.

- À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer $a \wedge b$. [0,5 pt]
- En déduire $a \vee b$. [0,5 pt]
- Décomposer a et b en produits de facteurs premiers. [1 pt]
- Retrouver $a \wedge b$ et $a \vee b$ par une autre méthode. [1 pt]
- Déterminer le nombre de diviseurs positifs de a et celui de b . [0,5 pt]
- a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(n^2 + 4n + 8) \wedge (n + 3) = (n + 3) \wedge 5$. [1 pt]
b. En déduire tous les entiers naturels n tels que $n + 3$ divise $n^2 + 4n + 8$. [1,5 pt]

Exercice 2 — PGCD avec paramètre — 6 points

★★★★★

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

- a. Montrer que $n \wedge (2n + 1) = 1$. [0,25 pt]
b. En déduire que $(n + 1) \wedge (2n + 1) = 1$. [0,25 pt]
- On pose $\alpha = n + 3$, $\beta = 2n + 1$ et $d = \alpha \wedge \beta$.
a. Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de d . [1 pt]
b. Montrer que si 5 divise α et 5 divise β , alors 5 divise $n - 2$. [0,5 pt]
- On pose $a = n^3 + 2n^2 - 3n$ et $b = 2n^2 - n - 1$. Factoriser a et b , puis en déduire que $n - 1$ divise a et $n - 1$ divise b . [1 pt]
- Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$; on pose $x = 2a + b$ et $y = 5a + 2b$.
a. Vérifier que $y - 2x = a$ et $5x - 2y = b$. [0,5 pt]
b. Montrer que $x \wedge y$ divise $a \wedge b$. [0,5 pt]
c. Montrer que $a \wedge b$ divise $x \wedge y$. [0,5 pt]
- a. Décomposer 377 en produit de facteurs premiers. [0,25 pt]
b. Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ le système $(S) : \begin{cases} ab = 2(a \vee b) \\ (2a + b)(5a + 2b) = 1508 \end{cases}$, d'inconnue $(a; b)$. [1,25 pt]

Exercice 3 — Congruences et nombres premiers — 8 points

★★★★★

Soit p un nombre premier tel que $p \geq 5$.

- a. Vérifier que $2^3 \equiv 1 [7]$. [0,25 pt]
b. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k$ ou $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$. [0,25 pt]
- En déduire que :
a. pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2^n \equiv 1 [7]$ ou $2^n \equiv 2 [7]$ ou $2^n \equiv 4 [7]$; [0,5 pt]
b. 3 divise $p^2 - 1$. [0,5 pt]
- a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 divise $2^{2n+1} + 1$. [0,5 pt]
b. En déduire que 3 divise $2^p + 1$. [0,5 pt]

- c. En déduire que $2^p + p^2$ n'est pas premier. [0,5 pt]
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{n+6} - 3^n$. [0,5 pt]
5. Déterminer le reste de la division euclidienne de 10^{36} par 7. [0,5 pt]
6. Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ les équations $(E_1) : \bar{2}x = \bar{1}$ et $(E_2) : x^2 - \bar{3}x + \bar{2} = \bar{0}$. [1 pt]
7. Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Montrer que :
- a. $(a \text{ divise } b \text{ et } b \text{ divise } a) \iff |a| = |b|$; [1 pt]
- b. $3 \text{ divise } (a + b)^3 \iff 3 \text{ divise } a^3 + b^3$; [1 pt]
- c. $(a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$. [1 pt]

Exercice 4 — Questions bonus (+0,5 pt chacune)

★★★★★

1. Combien d'entiers de l'ensemble $\{1; 2; \dots; 1000\}$ sont divisibles par 6 ou par 15 ? [+0,5 pt]
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $(n! + 1) \wedge ((n + 1)! + 1) = 1$. [+0,5 pt]