

Devoir surveillé n° 2 — Durée : 2 heures

Dérivation — Étude de fonctions

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Durée : 2 heures. Le soin et la rédaction sont pris en compte. Barème indiqué entre crochets : exercice 1 sur 12 points, exercice 2 sur 3 points, exercice 3 sur 5 points ; total sur 20. Deux questions **bonus** (+0,5 pt chacune) figurent à la fin ; la note est plafonnée à 20. Programme : chapitres 09 à 12 (limites, dérivation, étude de fonctions).

Exercice 1 — Étude d'une fonction

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x - 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$, et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. [0,5 pt]
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, puis interpréter graphiquement le résultat. [1,5 pt]
3. a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{x^4 - 4x + 3}{x^4}$, puis vérifier que $x^4 - 4x + 3 = (x-1)^2(x^2 + 2x + 3)$. [1,5 pt]
b. Dresser le tableau de variations de f . [1 pt]
4. a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f''(x) = \frac{12(x-1)}{x^5}$. [1 pt]
b. Étudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ en précisant ses points d'inflexion éventuels. [1 pt]
5. a. Montrer que la droite $(\Delta) : y = x - 1$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $\pm\infty$. [0,5 pt]
b. Étudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ) . [1 pt]
6. Déterminer l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse -1 . [0,5 pt]
7. Construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. [3 pts]
8. En utilisant la courbe, montrer que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation $x^4 - (m+1)x^3 + 2x - 1 = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$. [0,5 pt]

Exercice 2 — Dérivation

★★★★★

1. a. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' + 5y = 0$. [0,25 pt]
b. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Vérifier que la fonction $g : x \mapsto \sin(\sqrt{5}x + \theta)$ est une solution de l'équation (E) . [0,5 pt]
2. On considère la fonction f définie sur $[-4; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x + 4}$.
a. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{4}$. [0,5 pt]
b. Donner l'approximation affine de la fonction f au voisinage de 0. [0,5 pt]
c. En déduire une valeur approchée de $\sqrt{4,0004} + \sqrt{4,02}$. [0,5 pt]
3. Montrer que, pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$: $\sin x + 2 \tan x \geq 3x$. [0,75 pt]

Exercice 3 — Fonction définie par morceaux

★★★★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$ si $x < 1$ et $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$ si $x \geq 1$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$. [0,5 pt]
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f . [0,5 pt]
3. Étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 1, puis interpréter graphiquement les résultats obtenus. [1 pt]
4. a. Montrer que : $(\forall x \in]-\infty; 1[) f'(x) = \frac{8x}{(x^2 + 3)^2}$ et $(\forall x \in]1; +\infty[) f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x}}$. [1 pt]
b. Étudier le signe de $f'(x)$ (étudier les cas $x > 1$, $0 \leq x < 1$ et $x < 0$) et dresser le tableau de variations de f . [2 pts]

Exercice 4 — Questions bonus (+0,5 pt chacune)

★★★★★

1. (Exercice 1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) - 1 = \frac{(x-1)^3(x+1)}{x^3}$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{(x-1)^3}$. [+0,5 pt]
2. (Exercice 3) Étudier la branche infinie de la courbe de f au voisinage de $+\infty$. [+0,5 pt]