

Devoir maison n° 4

Géométrie de l'espace (Ch. 15 à 17)

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Programme couvert. Chapitres 15 (vecteurs de l'espace), 16 (analytique de l'espace) et 17 (produit scalaire dans l'espace). Sauf mention contraire, l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Toute réponse doit être justifiée ; on annoncera la méthode utilisée.

Exercice 1 — Vecteurs dans un tétraèdre

★★★★★

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$, K le centre de gravité du triangle BCD et G le point tel que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$.

1. Montrer que $\vec{IJ} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$. En déduire que les vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$ sont coplanaires.
2. Montrer que $\vec{AG} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$, puis que G est le milieu de $[IJ]$.
3. Montrer que $\vec{AG} = \frac{3}{4}\vec{AK}$. Que peut-on dire des points A , G , K ?
4. On munit l'espace du repère (non nécessairement orthonormé) $(A; \vec{AB}; \vec{AC}; \vec{AD})$. Soient P et Q les points définis par $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ et $\vec{AQ} = \frac{1}{2}\vec{AC}$, et, pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, R_α le point défini par $\vec{AR}_\alpha = \alpha\vec{AD}$.
 - a. Donner les coordonnées de P , Q , R_α et G .
 - b. Déterminer α pour que G appartienne au plan (PQR_α) . Interpréter géométriquement la position de R_α .

Exercice 2 — Plans et droites : positions relatives

★★★★★

On considère les points $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(0; 1; 2)$ et les plans $(Q) : x - y + 2z - 1 = 0$ et $(R) : 2x + y + z - 4 = 0$.

1. a. Montrer que A , B , C définissent un plan et en donner une représentation paramétrique (paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).
- b. En éliminant les paramètres, en déduire une équation cartésienne de (ABC) .
2. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère la droite $(D_m) : x = m + t, y = 1 - t, z = mt$ ($t \in \mathbb{R}$). Étudier, selon les valeurs de m , l'intersection de (D_m) et du plan (ABC) .
3. Montrer que (ABC) et (Q) sont sécants selon une droite (Δ) dont on donnera une représentation paramétrique.
4. Déterminer l'intersection des trois plans (ABC) , (Q) et (R) . Les plans (R) et (ABC) sont-ils parallèles ? Interpréter.

Exercice 3 — Produit scalaire : ensembles de points

★★★★★

On considère les points $A(1; -1; 0)$ et $B(3; 1; 2)$.

1. Déterminer, de deux façons, une équation cartésienne du plan médiateur (Π) du segment $[AB]$.
2. Calculer la distance du point O à la droite (AB) (on utilisera un produit vectoriel), puis déterminer le projeté orthogonal de O sur (AB) .
3. Déterminer l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que $MA^2 - MB^2 = 4$. Quelle est sa position par rapport à (Π) ?
4. a. Déterminer l'ensemble (Σ) des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.
- b. Montrer que le plan $(P) : x - y + z = 0$ est tangent à (Σ) et déterminer le point de contact.

Exercice 4 — Famille de sphères

★★★★★

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on note (S_m) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2my - 2z + 2m^2 + m - 3 = 0.$$

1. Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels (S_m) est une sphère ; préciser alors son centre Ω_m et son rayon R_m . Que vaut (S_4) ?

2. Montrer que, lorsque m décrit $] -\infty; 4[$, les centres Ω_m décrivent une demi-droite ouverte, portée par une droite dont on donnera une représentation paramétrique.
3. Déterminer m pour que (S_m) soit tangente au plan (xOy) .
4. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles (S_m) passe par l'origine O .
5. Montrer que, pour tout $m < 4$, le plan $(P) : x + y + z - 1 = 0$ coupe (S_m) selon un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 5 — *Problème de synthèse : cube et sphère inscrite*

★★★★★

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1 ; on munit l'espace du repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées des huit sommets du cube.
2. a. Montrer que $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE) et en déduire une équation cartésienne de (BDE) .
b. Calculer $d(A; (BDE))$ et $d(G; (BDE))$.
3. a. Montrer que le triangle BDE est équilatéral et calculer son aire.
b. Calculer de deux façons le volume du tétraèdre $ABDE$.
4. Montrer que le triangle AFH est équilatéral, en calculant $\cos \widehat{FAH}$ à l'aide d'un produit scalaire.
5. Pour $t \in]0; \frac{1}{3}[$, on note $\Omega_t(t; t; t)$ et (Σ_t) la sphère de centre Ω_t et de rayon t .
a. Montrer que (Σ_t) est tangente aux trois plans (ABD) , (ABE) et (ADE) .
b. Déterminer t pour que (Σ_t) soit aussi tangente au plan (BDE) ; on obtient la sphère inscrite dans le tétraèdre $ABDE$.
c. Retrouver ce rayon à l'aide de la formule $V = \frac{1}{3} r \mathcal{A}$, où V est le volume de $ABDE$ et $\mathcal{A}$ la somme des aires de ses quatre faces (on justifiera cette formule en découpant $ABDE$ en quatre tétraèdres de sommet le centre de la sphère).