

Devoir maison n° 3

Dénombrement — Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Programme couvert. Chapitre 14 (Arithmétique dans $\mathbb{Z}$), avec quelques outils du chapitre 13 (dénombrement des diviseurs). Toute réponse doit être justifiée ; on précisera le type de raisonnement utilisé. On écrit « divise » en toutes lettres.

Exercice 1 — Restes de divisions euclidiennes

★★★★★

- Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Le reste de la division euclidienne de a par 11 est 2, celui de b par 11 est 7.
 - Déterminer le reste de la division euclidienne par 11 de $a + b$ et de $a - b$.
 - En déduire le reste de la division euclidienne de $a^2 - b^2$ par 11.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne :
 - de $n^2 + n + 1$ par $n + 1$;
 - de $4^n + 3$ par $2^n + 1$ (on distinguera les cas $n = 1$ et $n \geq 2$).
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(n + 2)^2$ par $n + 3$.

Exercice 2 — Divisibilité et équations

★★★★★

- Montrer que la somme de trois entiers relatifs consécutifs est un multiple de 3.
- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations : a. $x^2 - y^2 = 9$; b. $x^2 - y^2 = 401$ (on admet que 401 est premier).
- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $n - 2$ est un multiple de 7, alors $n^3 - 1$ est un multiple de 7.
- Montrer que 13 divise $2^{70} + 3^{70}$.
- Déterminer les entiers naturels n dans chacun des cas suivants :
 - $n - 2$ divise $n + 5$;
 - $n + 1$ divise $n^3 + 2$.
- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $xy - 5x - 3y + 18 = 0$.

Exercice 3 — Congruences modulo 7 et 13

★★★★★

- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si 7 ne divise pas n , alors 7 divise $n^6 - 1$.
- a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{3n} \equiv 1 [13]$.
b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{3n+2} + 3^{3n+1} + 1$ est divisible par 13.
- Déterminer le reste de la division euclidienne de 32^{45} par 7.

Exercice 4 — Carrés modulo 8 ; équations

★★★★★

- a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $n^2 \equiv 0 [8]$ ou $n^2 \equiv 1 [8]$ ou $n^2 \equiv 4 [8]$.
b. En déduire que si $a \in \mathbb{Z}$ vérifie $a \equiv 7 [8]$, alors a n'est pas la somme de trois carrés d'entiers, c'est-à-dire : pour tout $(x; y; z) \in \mathbb{Z}^3$, $a \neq x^2 + y^2 + z^2$.
- Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations : a. $x^2 + x + 7 \equiv 0 [13]$; b. $2x + 11 \equiv 0 [8]$; c. $5x \equiv 1 [8]$.
- Montrer que le système $\begin{cases} x \equiv 3 [12] \\ x \equiv 5 [9] \end{cases}$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.
- Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - 2x - 7 = \bar{0}$.

Exercice 5 — Nombres premiers

★★★★★

- Décomposer 624 en produit de facteurs premiers et en déduire le nombre de ses diviseurs positifs.
- Soit p un nombre premier tel que $p \geq 3$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 4k + 1$ ou $p = 4k + 3$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le nombre $x = \sum_{k=0}^n (2025 + 2k)$ n'est pas premier.
- Soient p un nombre premier et $n \in \mathbb{Z}^*$. Montrer que si p ne divise pas n , alors $\text{PGCD}(p; n) = 1$.

5. Vérifier que si p_1 et p_2 sont deux nombres premiers distincts, alors $\text{PGCD}(p_1; p_2) = 1$.

Exercice 6 — *PGCD et PPCM*

★★★★★

On note $a \wedge b = \text{PGCD}(a; b)$ et $a \vee b = \text{PPCM}(a; b)$.

1. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer $604800 \wedge 476280$.
2. Déterminer $50 \wedge 40$ et $50 \vee 40$ par quatre méthodes différentes.
3. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : (3n^3 - 11n) \wedge (n + 3) = (n + 3) \wedge 48$.
 b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\frac{3n^3 - 11n}{n + 3} \in \mathbb{N}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 a. Montrer que $(n - 1) \wedge (n - 5)$ est un diviseur de 4.
 b. En déduire que si n est pair, alors $(n - 1) \wedge (n - 5) = 1$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $a = 5^{n+2} - 5^n$ et $b = 7^{n+2} - 7^n$. Déterminer $a \wedge b$ et $a \vee b$.
6. Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2 : (E_1) : \begin{cases} x + y = 100 \\ x \wedge y = 10 \end{cases} ; (E_2) : (x \wedge y) + (x \vee y) = x + y$.