

Devoir maison n° 2

Dérivation — Étude de fonctions

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Programme couvert. Chapitre 11 (Dérivation) et chapitre 12 (Étude de fonctions), avec les limites du chapitre 09. Toute réponse doit être justifiée. $(\mathcal{C}_f)$ désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 1 — Dérivation

★★★★★

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 16}{x^2 - 16}$.

- Déterminer D_f , l'ensemble de définition de f .
- Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- Montrer que, pour tout $x \in D_f$: $f'(x) = \frac{-64x}{(x^2 - 16)^2}$.
- Dresser le tableau de variations de f .
- En déduire que, pour tout $x \in]-4; 4[$: $f(x) \leq -1$.
- Montrer que la droite d'équation $y = -\frac{8}{9}x + \frac{1}{9}$ est la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 2.

Exercice 2 — Dérivation

★★★★★

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+3}$.

- Déterminer D_f .
- Étudier la dérivabilité de f à droite en -3 et interpréter graphiquement le résultat.
- Déterminer $D_{f'}$, l'ensemble de dérivabilité de f , puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_{f'}$.
- En déduire la valeur de la limite $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3} - 3}{x - 6}$ sans la calculer directement.
- Déterminer g , l'approximation affine de f au voisinage de 1.
- En déduire une valeur approchée de $\sqrt{4,002}$ (on pourra remarquer que $\sqrt{4,002} = f(1,002)$).
- Montrer que, pour tout réel h voisin de zéro : $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$.

Exercice 3 — Dérivation

★★★★★

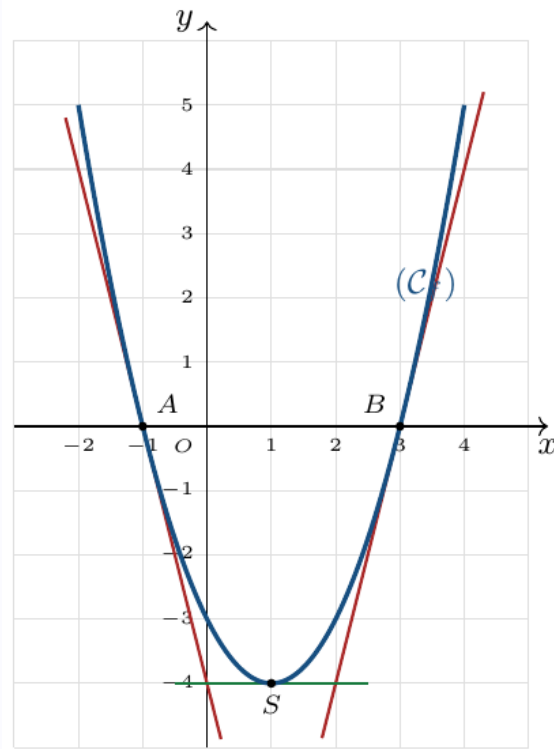
Préciser l'ensemble de dérivabilité, puis calculer et simplifier $f'(x)$ dans les cas suivants :

- $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x - 1$;
- $f(x) = x - \frac{2}{x}$;
- $f(x) = x^3 \sqrt{x}$;
- $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$ sur $]0; \pi[$;
- $f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x + 2}$;
- $f(x) = \frac{1}{x + \sin x}$ sur $]0; +\infty[$;
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$;
- $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^4$.

Exercice 4 — Dérivation (lecture graphique)

★★★★★

Soit f la fonction représentée ci-contre sur $[-2; 4]$. Les droites rouges sont les tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ aux points $A(-1; 0)$ et $B(3; 0)$; la droite verte est la tangente au point $S(1; -4)$.



1. Déterminer : $f'(1)$, $f'(-1)$ et $f'(3)$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $[-2; 4]$ (on donne $f(-2) = f(4) = 5$).
3. En déduire le tableau de signe de f' sur $[-2; 4]$.

Exercice 5 — Dérivation et inégalités

★★★★★

1. Montrer que, pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$: $\tan x \geq x$ (on pourra étudier la fonction $x \mapsto \tan x - x$).
2. Montrer que, pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$: $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ (on pourra étudier $g(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$ et le signe de g').
3. En étudiant la fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ sur $[1; +\infty[$, montrer que $2027 + \frac{1}{2027} > 2026 + \frac{1}{2026}$.

Exercice 6 — Étude de fonctions

★★★★★

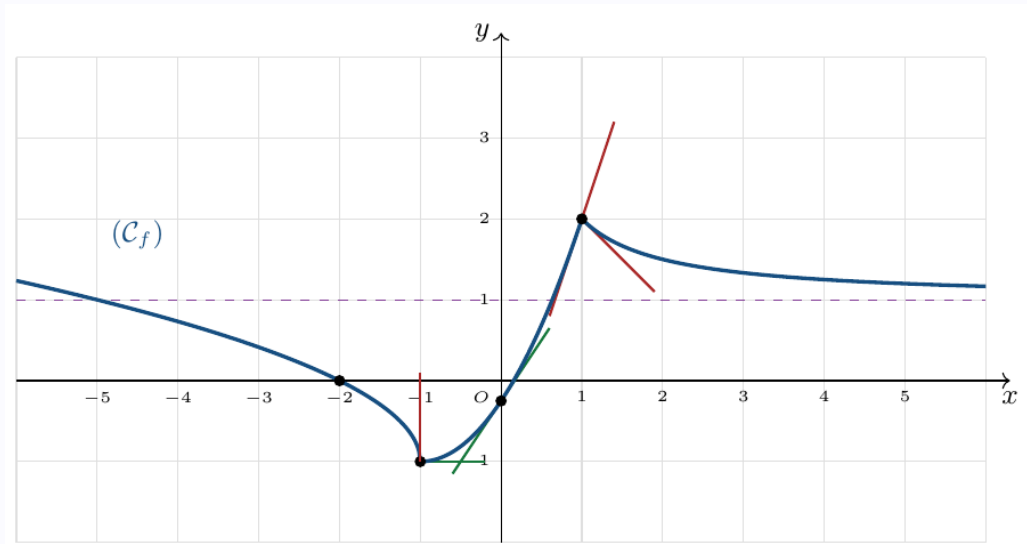
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4} + 1$.

1. Montrer que $D_f = \mathbb{R}$, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f et étudier les branches infinies de (C_f) .
2. Montrer que le point $I(0; 1)$ est un centre de symétrie de (C_f) .
3. a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{4(4 - x^2)}{(x^2 + 4)^2}$.
b. Dresser le tableau de variations de f .
4. a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = \frac{8x(x^2 - 12)}{(x^2 + 4)^3}$.
b. Étudier la concavité de (C_f) en précisant ses points d'inflexion.
5. Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point I .
6. Construire la courbe (C_f) et (T) .
7. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
8. Expliquer comment construire, à partir de (C_f) , les courbes (C_g) et (C_h) des fonctions $g : x \mapsto f(|x|)$ et $h : x \mapsto -f(x)$.

Exercice 7 — Étude de fonctions (lecture graphique)

★★★★★

Dans la figure ci-dessous, $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La droite violette $y = 1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$; au voisinage de $-\infty$, $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses. Les segments rouges et verts représentent des tangentes ou demi-tangentes : demi-tangente verticale à gauche et demi-tangente horizontale à droite au point $(-1; -1)$; demi-tangentes de coefficients directeurs 3 (à gauche) et -1 (à droite) au point $(1; 2)$; tangente de coefficient directeur $\frac{3}{2}$ au point d'abscisse 0.



- Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
- Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $\pm\infty$ (donner les limites correspondantes).
- f est-elle dérivable en 1 ? Justifier.
 - f est-elle dérivable à gauche en -1 ? Justifier.
 - Déterminer $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) + 1}{x + 1}$ et $f'_d(-1)$.
 - Déterminer $f'_g(1)$ et $f'_d(1)$.
 - Déterminer $f'(0)$.
- La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet-elle un point d'inflexion ? Justifier.
- Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère (on admet que $f(-2) = 0$ et que l'abscisse β de l'autre point d'intersection avec (Ox) vérifie $0 < \beta < 1$).
- Dresser le tableau de variations de f .
- Dresser le tableau de signe de f' .
- Discuter, selon les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.