

Devoir maison n° 1

Limite d'une fonction — Rotation

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Programme couvert. Chapitre 09 (Limite d'une fonction) et chapitre 10 (Rotation). Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 — Calcul de limites

★★★★★

Calculer les limites suivantes (x désigne un réel du domaine de définition de chaque expression).

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x + 2}{-2x^3 + x^2 + 1}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{-3x^2 + 4x - 1}$;
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 4x^3 - x^5)$;
4. $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 2x^3 - 1)$;
5. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 6}$;
6. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$;
7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x+4} - 3}{x - 1}$;
8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{3x-2} - 2}$;
9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+8} - 3}$;
10. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x+7}}{2 - \sqrt{3x-2}}$;
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{\frac{x}{3x}}$;
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{\tan(5x)}$;
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{\tan(4x)}$;
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$;
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$;
16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{3}{x}\right)$;
17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \tan \frac{2}{x}$;
18. $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan x$;
19. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 1} + x - 3)$;
20. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 3} + 3x)$;
21. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x} - 2x)$;
22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \cos x}{x^2 + 1}$;
23. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} + 3x}$;

24. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x E\left(\frac{2}{x}\right);$
25. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x) + \cos x}{x};$
26. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\cos(2x)};$
27. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right);$
28. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - ax\right),$ suivant les valeurs du réel a .

Exercice 2 — Définition de la limite

★★★★★

1. Factoriser le polynôme $x^2 - 3x + 2$ ($x \in \mathbb{R}$).
2. En utilisant la définition de la limite, montrer que $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5) = 3$.

Exercice 3 — Rotation et barycentre

★★★★★

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soient I et J les points définis par $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$. Les droites (IC) et (JD) coupent respectivement (BD) et (AC) en M et N . Soit $r = r(O; \frac{\pi}{2})$.

1. Construire une figure et déterminer $r(A)$, $r(B)$, $r(C)$ et $r(D)$.
2. a. Montrer que I est le barycentre de $(A; 1)$ et $(B; -3)$, et que J est le barycentre de $(B; 1)$ et $(C; -3)$.
b. En déduire que $r(I) = J$.
3. a. Déterminer les images des droites (BD) et (IC) par r .
b. En déduire que $r(M) = N$.
c. En déduire que $IM = JN$.
4. Montrer que $(CM) \perp (DN)$.

Exercice 4 — Composée de rotations et symétries

★★★★★

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On considère les rotations $R_A = r(A; \frac{\pi}{2})$ et $R_C = r(C; \frac{\pi}{4})$, et on pose $f = R_C \circ R_A$.

1. Déterminer $f(B)$, puis montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle.
2. Soit I le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle ABC .
a. Montrer que $R_A = S_{(AC)} \circ S_{(AI)}$ et $R_C = S_{(CI)} \circ S_{(AC)}$.
b. En déduire que I est le centre de f .
c. Soit $A' = f(A)$. Montrer que $(\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{IA'}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$.