

Corrigé du devoir surveillé n° 4 (barème)

Géométrie de l'espace (Ch. 15 à 17)

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — barème

Exercice 1 : 5 pts ; Exercice 2 : 7 pts ; Exercice 3 : 8 pts ; total 20 pts, plus 2 bonus de 0,5 pt (note plafonnée à 20). Résultats contrôlés avec Python/sympy et barème recompté par le script (`build/verif_lot4.py`).

Exercice 1 (5 points)

1. [0,5 pt] Relation de Chasles : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$. Or $ABCD$ est un carré, donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, et $ACGE$ est un rectangle, donc $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$. D'où $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

2. a. [1 pt] Soit L' le centre de gravité de BDE : $\overrightarrow{L'B} + \overrightarrow{L'D} + \overrightarrow{L'E} = \vec{0}$. En introduisant A (Chasles) : $3\overrightarrow{L'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{AL'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ [0,75]. Ainsi $\overrightarrow{AL'} = \overrightarrow{AL}$, donc $L' = L$ [0,25].

2. b. [0,5 pt] $L \in (AG)$ car $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$, et $L \in (BDE)$ (centre de gravité d'un triangle de ce plan). La droite (AG) n'est pas incluse dans (BDE) (sinon $A \in (BDE)$, et A, B, D, E seraient coplanaires, ce qui est faux) ; elle coupe donc ce plan en un seul point, qui est L .

3. a. [1 pt] $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$ et, avec $C(1; 1; 0)$, $G(1; 1; 1)$: $M\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$ [0,25]. Donc $\overrightarrow{BD}(-1; 1; 0)$, $\overrightarrow{BE}(-1; 0; 1)$, $\overrightarrow{AM}\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$ et

$$\det(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BE}; \overrightarrow{AM}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1 \times (0 - 1) - 1 \times \left(-\frac{1}{2} - 1\right) + 0 = \frac{5}{2} \neq 0.$$

[0,5] Le déterminant est non nul, donc les trois vecteurs ne sont pas coplanaires [0,25].

3. b. [1 pt] $M(x; y; z) \in (BDE) \iff \det(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BE}) = 0 \iff x + y + z - 1 = 0$ (on vérifie que B, D, E satisfont cette équation) [0,5]. La droite (AM) : $x = s, y = s, z = \frac{s}{2}$ ($s \in \mathbb{R}$) ; $s + s + \frac{s}{2} = 1 \iff s = \frac{2}{5}$, d'où $N\left(\frac{2}{5}; \frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AM}$ [0,5].

4. [1 pt] $\vec{u}_m(m; 1; m - 1)$. Ces trois vecteurs sont coplanaires $\iff \det(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BE}; \vec{u}_m) = 0$ [0,25]. Or

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & m - 1 \end{vmatrix} = -1 \times (0 \cdot (m - 1) - 1 \times 1) - 1 \times (-1 \times (m - 1) - m \times 1) = 1 + (2m - 1) = 2m$$

(développement selon la première colonne) [0,5]. Donc coplanaires $\iff 2m = 0 \iff m = 0$; contrôle : $\vec{u}_0 = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ED}$, vecteur du plan (BDE) [0,25].

Exercice 2 (7 points)

1. [1,5 pt] $\overrightarrow{AB}(1; 1; -2)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; 2; -1)$; $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$: non colinéaires, donc A, B, C non alignés [0,5].

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 + 2 + 2 = 3$, $AB = AC = \sqrt{6}$, d'où $\cos \widehat{BAC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ [0,5]. Le triangle ABC est isocèle en A avec un angle de $\frac{\pi}{3}$: il est **équilatéral** (contrôle : $\overrightarrow{BC}(-2; 1; 1)$, $BC = \sqrt{6}$) [0,5].

2. [1,5 pt] $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1 \times (-1) - (-2) \times 2; (-2) \times (-1) - 1 \times (-1); 1 \times 2 - 1 \times (-1)) = (3; 3; 3)$ [0,5]. Ce vecteur est normal à (ABC) ; on prend $\vec{n}(1; 1; 1)$: (ABC) : $x + y + z + d = 0$ et $A \in (ABC) \Rightarrow 3 + d = 0$: (ABC) : $x + y + z - 3 = 0$ [0,5]. Aire = $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{27} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ [0,5].

- 3. a. [0,75 pt]** (Δ) est dirigée par $\vec{n} : x = 3 + t, y = 3 + t, z = 3 + t$ ($t \in \mathbb{R}$). $M_t \in (ABC) \iff 9 + 3t - 3 = 0 \iff t = -2 : H(1; 1; 1)$.
- 3. b. [0,75 pt]** $\frac{A+B+C}{3}$ a pour coordonnées $(\frac{3}{3}; \frac{3}{3}; \frac{3}{3}) = (1; 1; 1) : c'est H$. $d(D; (ABC)) = \frac{|3+3+3-3|}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ (et l'on retrouve $DH = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$).
- 3. c. [0,5 pt]** $V = \frac{1}{3} \times \text{aire}(ABC) \times DH = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 3$ (unités de volume).
- 4. a. [0,5 pt]** $\vec{n}_m(m+1; m-1; -2m)$ n'est jamais nul ($m+1$ et $m-1$ ne s'annulent pas simultanément) : (P_m) est un plan de vecteur normal $\vec{n}_m$. $\vec{n}_m \cdot \vec{n} = (m+1) + (m-1) - 2m = 0$: les vecteurs normaux sont orthogonaux, donc $(P_m) \perp (ABC)$.
- 4. b. [0,5 pt]** Pour $M_t(3+t; 3+t; 3+t) \in (\Delta) : (3+t)[(m+1) + (m-1) - 2m] = 0$. Tout point de (Δ) vérifie l'équation de $(P_m) : (\Delta) \subset (P_m)$ pour tout $m \in \mathbb{R}$.
- 4. c. [0,5 pt]** $A \in (P_m) \iff (m+1) + 0 - 4m = 0 \iff m = \frac{1}{3}$.
- 4. d. [0,5 pt]** $B \in (P_m) \iff 2(m+1) + (m-1) = 0 \iff m = -\frac{1}{3}$. Comme $\frac{1}{3} \neq -\frac{1}{3}$, aucun plan (P_m) ne contient A et B (raisonnement : les deux conditions imposent deux valeurs distinctes de m).

Exercice 3 (8 points)

- 1. [1 pt]** On complète les carrés : $M \in (S) \iff (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1+4+9-5 = 9$. Comme $9 > 0$: sphère de centre $\Omega(1; -2; 3)$ et de rayon $R = 3$.
- 2. [2 pts]** $d(\Omega; (P)) = \frac{|2-2-6+3|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{3}{3} = 1 < 3 = R : (P)$ coupe (S) selon un cercle **[0,75]**. Son centre H est le projeté orthogonal de Ω sur $(P) : H = \Omega + \lambda \vec{n}_P$ avec $\vec{n}_P(2; 1; -2)$, et $H \in (P) \iff 2(1+2\lambda) + (-2+\lambda) - 2(3-2\lambda) + 3 = 0 \iff 9\lambda - 3 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{3} : H(\frac{5}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{7}{3})$ **[0,75]**. Rayon : $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$ **[0,5]**.
- 3. [1 pt]** $(1-1)^2 + (1+2)^2 + (3-3)^2 = 9 : A \in (S)$ **[0,25]**. (T) est le plan passant par A de vecteur normal $\vec{\Omega A}(0; 3; 0) : M \in (T) \iff \vec{\Omega A} \cdot \vec{AM} = 0 \iff 3(y-1) = 0 ; (T) : y-1 = 0$ **[0,75]**.
- 4. [1,5 pt]** $M_t \in (S) \iff t^2 + (3+t)^2 + (-t)^2 = 9$ (forme centrée) **[0,5]** $\iff 3t^2 + 6t = 0 \iff 3t(t+2) = 0 \iff t = 0$ ou $t = -2$ **[0,5]**. $t = 0$ donne A ; $t = -2$ donne $A'(-1; -1; 5)$. Donc $(D) \cap (S) = \{A; A'\}$ **[0,5]**.
- 5. [1,5 pt]** $d(\Omega; (Q_m)) = \frac{|1-2+3+m|}{\sqrt{3}} = \frac{|m+2|}{\sqrt{3}}$ **[0,5]**. On compare à $R = 3 : |m+2| < 3\sqrt{3} \iff -2-3\sqrt{3} < m < -2+3\sqrt{3} : \text{sécants selon un cercle ; } m = -2 \pm 3\sqrt{3} : (Q_m) \text{ tangent à } (S) ; m < -2-3\sqrt{3} \text{ ou } m > -2+3\sqrt{3} : (Q_m) \cap (S) = \emptyset$ **[1]**.
- 6. [1 pt]** Soit I le milieu de $[AA'] : I(0; 0; 4)$. $\vec{MA} \cdot \vec{MA'} = (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} - \vec{IA}) = MI^2 - IA^2$ **[0,5]**. Donc $\vec{MA} \cdot \vec{MA'} = 0 \iff MI = IA = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} : (\Gamma)$ est la sphère de diamètre $[AA']$, de centre $I(0; 0; 4)$ et de rayon $\sqrt{3}$ **[0,5]**.

Bonus

- 1. [+0,5 pt]** Soit $H(1; 1; 1)$ le centre de gravité de ABC ($\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = \vec{0}$). En développant $(\vec{MH} + \vec{HA})^2 + \dots : MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MH^2 + HA^2 + HB^2 + HC^2 = 3MH^2 + 6$ ($HA^2 = HB^2 = HC^2 = 2$). Donc $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 18 \iff MH^2 = 4 \iff MH = 2$: sphère de centre $H(1; 1; 1)$ et de rayon 2.
- 2. [+0,5 pt]** $r^2 = R^2 - d^2 = 9 - \frac{(m+2)^2}{3} = 6 \iff (m+2)^2 = 9 \iff m = 1$ ou $m = -5$ (valeurs bien dans l'intervalle de sécance). Le centre est le projeté de $\Omega : \Omega + \lambda(1; 1; 1)$ avec $3\lambda + m + 2 = 0$. Pour $m = 1 : \lambda = -1$, centre $(0; -3; 2)$; pour $m = -5 : \lambda = 1$, centre $(2; -1; 4)$.