

Corrigé du devoir surveillé n° 3 (barème)

Dénombrement — Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — barème

Exercice 1 : 6 pts ; Exercice 2 : 6 pts ; Exercice 3 : 8 pts ; total 20 pts, plus 2 bonus de 0,5 pt (note plafonnée à 20). Résultats contrôlés avec Python/sympy et barème recompté par le script (`build/verif_lot3.py`).

Exercice 1 (6 points)

1. **[0,5 pt]** $3500 = 2200 \times 1 + 1300$; $2200 = 1300 \times 1 + 900$; $1300 = 900 \times 1 + 400$; $900 = 400 \times 2 + 100$; $400 = 100 \times 4 + 0$. Dernier reste non nul : $a \wedge b = 100$.
2. **[0,5 pt]** $(a \wedge b)(a \vee b) = ab$ donc $a \vee b = \frac{3500 \times 2200}{100} = 77\,000$.
3. **[1 pt]** $a = 3500 = 2^2 \times 5^3 \times 7$ **[0,5]** ; $b = 2200 = 2^3 \times 5^2 \times 11$ **[0,5]**.
4. **[1 pt]** Facteurs communs avec le plus petit exposant : $a \wedge b = 2^2 \times 5^2 = 100$ **[0,5]** ; tous les facteurs avec le plus grand exposant : $a \vee b = 2^3 \times 5^3 \times 7 \times 11 = 77\,000$ **[0,5]**.
5. **[0,5 pt]** $a : (2+1)(3+1)(1+1) = 24$ diviseurs ; $b : (3+1)(2+1)(1+1) = 24$ diviseurs.
6. a. **[1 pt]** $n^2 + 4n + 8 = (n+3)(n+1) + 5$ **[0,5]**, donc $(n^2 + 4n + 8) \wedge (n+3) = (n+3) \wedge 5$ (propriété $u \wedge v = v \wedge (u - kv)$) **[0,5]**.
6. b. **[1,5 pt]** $n+3$ divise $n^2 + 4n + 8 \iff (n^2 + 4n + 8) \wedge (n+3) = n+3 \iff (n+3) \wedge 5 = n+3 \iff n+3$ divise 5 **[0,75]**. Or $n+3 \geq 3$, donc $n+3 = 5$, soit $n = 2$ **[0,5]**. Vérification : $4 + 8 + 8 = 20 = 5 \times 4$ **[0,25]**.

Exercice 2 (6 points)

1. a. **[0,25 pt]** $\delta = n \wedge (2n+1)$ divise $(2n+1) - 2n = 1$, donc $\delta = 1$.
1. b. **[0,25 pt]** $(n+1) \wedge (2n+1) = (n+1) \wedge ((2n+1) - (n+1)) = (n+1) \wedge n = 1$ (deux entiers consécutifs).
2. a. **[1 pt]** $2\alpha - \beta = 2n + 6 - 2n - 1 = 5$ **[0,5]**. d divise α et β , donc d divise $2\alpha - \beta = 5$; 5 est premier, donc $d \in \{1; 5\}$ **[0,5]**.
2. b. **[0,5 pt]** Raisonnement direct : 5 divise $\alpha = n+3 \implies 5$ divise $(n+3) - 5 = n-2$.
3. **[1 pt]** $a = n(n^2 + 2n - 3) = n(n-1)(n+3)$ et $b = (n-1)(2n+1)$ **[0,5]**. Donc $a = (n-1) \times n(n+3)$ et $b = (n-1) \times (2n+1)$ avec $n(n+3), 2n+1 \in \mathbb{Z}$: $n-1$ divise a et $n-1$ divise b **[0,5]**.
4. a. **[0,5 pt]** $y - 2x = 5a + 2b - 4a - 2b = a$ et $5x - 2y = 10a + 5b - 10a - 4b = b$.
4. b. **[0,5 pt]** $x \wedge y$ divise x et y , donc divise $y - 2x = a$ et $5x - 2y = b$; il divise donc $a \wedge b$ (un diviseur commun divise le PGCD).
4. c. **[0,5 pt]** $a \wedge b$ divise a et b , donc divise $x = 2a + b$ et $y = 5a + 2b$; il divise donc $x \wedge y$. (Ainsi $x \wedge y = a \wedge b$, car ce sont deux entiers positifs qui se divisent mutuellement.)
5. a. **[0,25 pt]** $377 = 13 \times 29$ (13 et 29 premiers).
5. b. **[1,25 pt]** Soit $d = a \wedge b$. Comme $(a \wedge b)(a \vee b) = ab$, la 1^{re} équation donne $d(a \vee b) = 2(a \vee b)$, donc $d = 2$ **[0,25]**. D'après 4., $x \wedge y = 2$ avec $x = 2a + b$, $y = 5a + 2b$ et $xy = 1508$; on écrit $x = 2x'$, $y = 2y'$ avec $x' \wedge y' = 1$ et $4x'y' = 1508$, soit $x'y' = 377 = 13 \times 29$ **[0,5]**. De plus $3 \leq x < y$ (car $a, b \geq 1$), donc $x' < y'$ et $x' \geq 2$: $(x'; y') = (13; 29)$, d'où $x = 26$, $y = 58$ **[0,25]**. Alors $a = y - 2x = 6$ et $b = 5x - 2y = 14$. Vérification : $6 \wedge 14 = 2$, $6 \vee 14 = 42$, $ab = 84 = 2 \times 42$ et $26 \times 58 = 1508$. $S = \{(6; 14)\}$ **[0,25]**.

Exercice 3 (8 points)

1. a. **[0,25 pt]** $2^3 = 8 = 7 + 1 \equiv 1 [7]$.

1. **b. [0,25 pt]** Division euclidienne de n par 3 : $n = 3k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0; 1; 2\}$.
2. **a. [0,5 pt]** Disjonction de cas : Cas 1 : $n = 3k : 2^n = (2^3)^k \equiv 1 [7]$. Cas 2 : $n = 3k + 1 : 2^n \equiv 2 [7]$. Cas 3 : $n = 3k + 2 : 2^n \equiv 4 [7]$.
2. **b. [0,5 pt]** p est premier et $p \geq 5$, donc 3 ne divise pas $p : p \equiv 1$ ou $p \equiv 2 [3]$. Cas 1 : $p \equiv 1 : p^2 \equiv 1 [3]$. Cas 2 : $p \equiv 2 : p^2 \equiv 4 \equiv 1 [3]$. Dans les deux cas 3 divise $p^2 - 1$.
3. **a. [0,5 pt]** $2 \equiv -1 [3]$ donc $2^{2n+1} \equiv (-1)^{2n+1} = -1 [3]$ et 3 divise $2^{2n+1} + 1$.
3. **b. [0,5 pt]** p est premier et $p \geq 5$, donc impair : $p = 2n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$, et d'après a., 3 divise $2^p + 1$.
3. **c. [0,5 pt]** $2^p + p^2 = (2^p + 1) + (p^2 - 1)$: d'après 2.b et 3.b, 3 divise $2^p + p^2$ [0,25]. Comme $2^p + p^2 > 3$, il possède le diviseur 3 différent de 1 et de lui-même : il n'est pas premier [0,25].
4. **[0,5 pt]** $3^{n+6} - 3^n = 3^n(3^6 - 1) = 3^n \times 728 = 3^n \times 7 \times 104 : 7$ divise $3^{n+6} - 3^n$.
5. **[0,5 pt]** $10 \equiv 3 [7]$; d'après 4. avec $n = 0$, $3^6 \equiv 1 [7]$; $10^{36} \equiv 3^{36} = (3^6)^6 \equiv 1 [7]$: le reste est 1.
6. **[1 pt]** $(E_1) : \bar{2} \times \bar{3} = \bar{6} = \bar{1}$, et $\bar{2}x$ vaut $\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{1}, \bar{3}$ pour $x = \bar{0}, \dots, \bar{4} : S_1 = \{\bar{3}\}$ [0,5]. $(E_2) : x^2 - \bar{3}x + \bar{2} = (x - \bar{1})(x - \bar{2})$; le test des cinq classes donne $\bar{2}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{2}, \bar{1} : S_2 = \{\bar{1}, \bar{2}\}$ [0,5].
7. **a. [1 pt]** $(\implies) a$ divise b et $b \neq 0 \implies |a| \leq |b|$; de même $|b| \leq |a|$; donc $|a| = |b|$ [0,5]. $(\impliedby)$ Si $|a| = |b|$, alors $b = a$ ou $b = -a$, donc $b = (\pm 1)a$ et $a = (\pm 1)b$: chacun divise l'autre [0,5].
7. **b. [1 pt]** $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ et 3 divise $3ab(a + b)$ [0,5]. Donc $(a + b)^3 \equiv a^3 + b^3 [3]$, et 3 divise $(a + b)^3 \iff 3$ divise $a^3 + b^3$ [0,5].
7. **c. [1 pt]** Si $|a| = 1$ ou $|b| = 1$, c'est immédiat. Sinon on écrit $|a| = \prod p_i^{\alpha_i}$ et $|b| = \prod p_i^{\beta_i}$ (mêmes nombres premiers p_i , exposants éventuellement nuls) [0,25]. Alors $a \wedge b = \prod p_i^{\min(\alpha_i; \beta_i)}$ et $a \vee b = \prod p_i^{\max(\alpha_i; \beta_i)}$ [0,25] ; comme $\min(\alpha_i; \beta_i) + \max(\alpha_i; \beta_i) = \alpha_i + \beta_i$, le produit vaut $\prod p_i^{\alpha_i + \beta_i} = |a| |b| = |ab|$ [0,5].

Bonus

1. **[+0,5 pt]** Soient A (multiples de 6) et B (multiples de 15) dans $\{1; \dots; 1000\}$: $\text{Card } A = E\left(\frac{1000}{6}\right) = 166$, $\text{Card } B = E\left(\frac{1000}{15}\right) = 66$; $A \cap B$ est l'ensemble des multiples de $6 \vee 15 = 30$: $\text{Card}(A \cap B) = 33$. Donc $\text{Card}(A \cup B) = 166 + 66 - 33 = 199$.
2. **[+0,5 pt]** Soit $d = (n! + 1) \wedge ((n + 1)! + 1)$. d divise $(n + 1)(n! + 1) - ((n + 1)! + 1) = n$. Comme d divise n et n divise $n!$, d divise $n! + 1$, donc d divise 1 : $d = 1$.