

# Corrigé du devoir surveillé n° 2 (barème)

## Dérivation — Étude de fonctions

1<sup>ère</sup> Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

### Remarque — barème

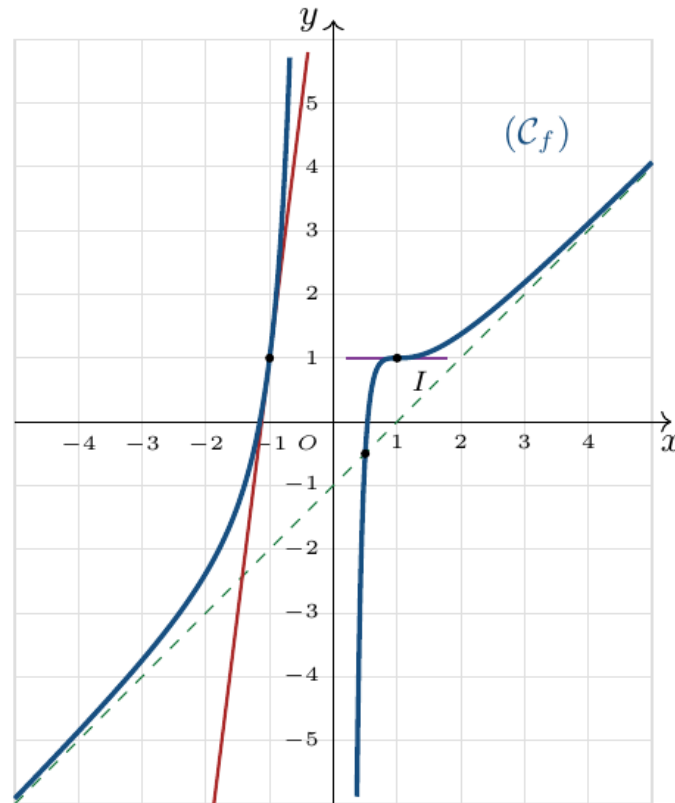
Exercice 1 : 12 pts ; Exercice 2 : 3 pts ; Exercice 3 : 5 pts ; total 20 pts, plus 2 bonus de 0,5 pt (note plafonnée à 20). Résultats contrôlés avec Python/sympy (`build/verif_lot2.py`), barème recompté par le script.

### Exercice 1 (12 points)

1. **[0,5 pt]**  $\frac{2}{x^2} \rightarrow 0$  et  $\frac{1}{x^3} \rightarrow 0$  en  $\pm\infty$  ; donc  $\lim_{-\infty} f = -\infty$  et  $\lim_{+\infty} f = +\infty$ .
2. **[1,5 pt]** Pour  $x \neq 0$  :  $\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} = \frac{2x-1}{x^3}$  **[0,5]**. Quand  $x \rightarrow 0^-$  :  $2x-1 \rightarrow -1$  et  $x^3 \rightarrow 0^-$ , forme  $\frac{-1}{0^-} : +\infty$  ; donc  $\lim_{0^-} f = +\infty$ . Quand  $x \rightarrow 0^+$  : forme  $\frac{-1}{0^+}$ ,  $\lim_{0^+} f = -\infty$  **[0,5]**. La droite d'équation  $x = 0$  (axe des ordonnées) est asymptote verticale à  $(\mathcal{C}_f)$  **[0,5]**.
3. **a. [1,5 pt]**  $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^4} = \frac{x^4-4x+3}{x^4}$  **[0,75]**. Et  $(x-1)^2(x^2+2x+3) = (x^2-2x+1)(x^2+2x+3) = x^4+2x^3+3x^2-2x^3-4x^2-6x+x^2+2x+3 = x^4-4x+3$  **[0,75]**.
3. **b. [1 pt]**  $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 > 0$  et  $x^4 > 0$  :  $f'(x) \geq 0$ , nul seulement en  $x = 1$ .  $f$  est strictement croissante sur  $] -\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$  ;  $f(1) = 1$ .

| $x$     | $-\infty$ |            | 0                    |            | 1 |            | $+\infty$ |
|---------|-----------|------------|----------------------|------------|---|------------|-----------|
| $f'(x)$ |           | +          |                      | +          | 0 | +          |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty    -\infty$ | $\nearrow$ | 1 | $\nearrow$ | $+\infty$ |

4. **a. [1 pt]**  $f'(x) = 1 - 4x^{-3} + 3x^{-4}$ , donc  $f''(x) = 12x^{-4} - 12x^{-5} = \frac{12x-12}{x^5} = \frac{12(x-1)}{x^5}$ .
4. **b. [1 pt]** Signe de  $\frac{x-1}{x^5}$  : positif sur  $] -\infty; 0[$ , négatif sur  $]0; 1[$ , positif sur  $]1; +\infty[$ .  $(\mathcal{C}_f)$  est convexe sur  $] -\infty; 0[$  et sur  $]1; +\infty[$ , concave sur  $]0; 1[$  **[0,5]**.  $f''$  s'annule en 1 en changeant de signe :  $I(1; 1)$  est un point d'inflexion (à tangente horizontale) ; pas d'inflexion en  $0 \notin D_f$  **[0,5]**.
5. **a. [0,5 pt]**  $f(x) - (x-1) = \frac{2x-1}{x^3} = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \rightarrow 0$  en  $\pm\infty$  :  $(\Delta)$  est asymptote oblique au voisinage de  $\pm\infty$ .
5. **b. [1 pt]** Signe de  $\frac{2x-1}{x^3}$  :  $(\mathcal{C}_f)$  est au-dessus de  $(\Delta)$  sur  $] -\infty; 0[$  et sur  $] \frac{1}{2}; +\infty[$ , au-dessous sur  $]0; \frac{1}{2}[$  ; elles se coupent au point  $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ .
6. **[0,5 pt]**  $f(-1) = -1 - 1 + 2 + 1 = 1$  et  $f'(-1) = \frac{1+4+3}{1} = 8$  :  $y = 8(x+1) + 1 = 8x + 9$ .
7. **[3 pts]** Asymptotes  $x = 0$  et  $(\Delta)$ , point d'inflexion  $I(1; 1)$  à tangente horizontale (en violet), tangente en  $(-1; 1)$  (en rouge) **[1]** ; respect des variations, des positions relatives et de la concavité **[2]**.



8. [0,5 pt] Pour  $x \neq 0$  (et 0 n'est jamais solution, car il donnerait  $-1 = 0$ ) :  $f(x) = m \iff x^4 - x^3 + 2x - 1 = mx^3 \iff x^4 - (m+1)x^3 + 2x - 1 = 0$  (en multipliant par  $x^3 \neq 0$ ). Sur  $] -\infty; 0[$ ,  $f$  est continue (rationnelle), strictement croissante de  $-\infty$  à  $+\infty$ ; de même sur  $]0; +\infty[$ . La droite  $y = m$  coupe donc  $(C_f)$  en exactement un point sur chacune des deux branches : l'équation a exactement deux solutions.

### Exercice 2 (3 points)

1. a. [0,25 pt]  $\omega = \sqrt{5}$  : les solutions sont  $y(x) = \alpha \cos(\sqrt{5}x) + \beta \sin(\sqrt{5}x)$ ,  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ .
1. b. [0,5 pt]  $g'(x) = \sqrt{5} \cos(\sqrt{5}x + \theta)$ ,  $g''(x) = -5 \sin(\sqrt{5}x + \theta) = -5g(x)$ , donc  $g'' + 5g = 0$ . (Autre méthode :  $g(x) = \cos \theta \sin \sqrt{5}x + \sin \theta \cos \sqrt{5}x$  est de la forme du 1.a.)
2. a. [0,5 pt]  $f(0) = 2 + 2 = 4$ . Pour  $x \neq 0$  :  $\frac{f(x)-4}{x} = \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} + \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} \rightarrow 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ .
2. b. [0,5 pt]  $f$  est dérivable en 0,  $f'(0) = \frac{1}{4}$  : l'approximation affine est  $x \mapsto 4 + \frac{1}{4}x$ , et  $f(h) \approx 4 + \frac{h}{4}$  pour  $h$  voisin de 0.
2. c. [0,5 pt]  $\sqrt{4,0004} + \sqrt{4,02} = f(0,02) \approx 4 + \frac{0,02}{4} = 4,005$ .
3. [0,75 pt] Soit  $\varphi(x) = \sin x + 2 \tan x - 3x$  sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$ . En posant  $c = \cos x \in ]0; 1]$  :  $\varphi'(x) = c + \frac{2}{c^2} - 3 = \frac{c^3 - 3c^2 + 2}{c^2} = \frac{(c-1)(c^2 - 2c - 2)}{c^2}$  [0,25]. Pour  $c \in ]0; 1]$  :  $c - 1 \leq 0$  et  $c^2 - 2c - 2 = (c-1)^2 - 3 < 0$ , donc  $\varphi'(x) \geq 0$  [0,25].  $\varphi$  est croissante et  $\varphi(0) = 0$ , d'où  $\varphi(x) \geq 0$  :  $\sin x + 2 \tan x \geq 3x$  [0,25].

### Exercice 3 (5 points)

1. [0,5 pt] Pour  $x < 1$  :  $x^2 + 3 > 0$ ,  $f(x)$  est défini. Pour  $x \geq 1$  :  $x^3 - x = x(x-1)(x+1) \geq 0$  (trois facteurs positifs),  $f(x)$  est défini. Donc  $D_f = \mathbb{R}$ .
2. [0,5 pt]  $\lim_{-\infty} f = \lim_{-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ ;  $\lim_{+\infty} \sqrt{x^3 - x} = +\infty$  (car  $x^3 - x \rightarrow +\infty$ ).
3. [1 pt]  $f(1) = 0$ . À gauche :  $\frac{f(x)}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+3)(x-1)} = \frac{x+1}{x^2+3} \rightarrow \frac{1}{2}$  :  $f'_g(1) = \frac{1}{2}$ , demi-tangente  $y = \frac{1}{2}(x-1)$  ( $x \leq 1$ ) [0,5]. À droite :  $\frac{\sqrt{x(x-1)(x+1)}}{x-1} = \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x-1}} \rightarrow +\infty$  :  $f$  n'est pas dérivable à droite en 1; demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point  $(1; 0)$  [0,5].
4. a. [1 pt] Pour  $x < 1$  :  $f'(x) = \frac{2x(x^2+3) - (x^2-1)2x}{(x^2+3)^2} = \frac{8x}{(x^2+3)^2}$  [0,5]. Pour  $x > 1$  :  $x^3 - x > 0$  et  $f'(x) = \frac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}}$

[0,5].

4. b. [2 pts] Si  $x > 1$  :  $3x^2 - 1 > 2 > 0$ , donc  $f'(x) > 0$  ; si  $0 \leq x < 1$  :  $f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2} \geq 0$  (nul en 0) ; si  $x < 0$  :  $f'(x) < 0$  [1].  $f(0) = -\frac{1}{3}$  [0,25].

|         |           |   |                |   |   |   |           |
|---------|-----------|---|----------------|---|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |   | 0              |   | 1 |   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | − | 0              | + |   | + |           |
| $f(x)$  | 1         | ↘ | $-\frac{1}{3}$ | ↗ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

[0,75]

### Questions bonus

1. [+0,5]  $f(x) - 1 = x - 2 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} = \frac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x^3}$  et  $(x-1)^3(x+1) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(x+1) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$ .  
Donc  $\frac{f(x)-1}{(x-1)^3} = \frac{x+1}{x^3} \rightarrow 2$  quand  $x \rightarrow 1$ . (Ce résultat confirme que la tangente en  $I$  est horizontale et que la courbe la traverse.)
2. [+0,5]  $\lim_{+\infty} f = +\infty$  et, pour  $x > 1$ ,  $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{x^3-x}{x^2}} = \sqrt{x - \frac{1}{x}} \rightarrow +\infty$  : branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.