

Corrigé du devoir surveillé n° 1 (barème)

Limite d'une fonction — Rotation

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — barème

Exercice 1 : 12 pts (1 pt par limite en 1 et 2 ; 1 pt par limite en 3 ; 0,5 pt par limite en 4) ; Exercice 2 : 8 pts (1 pt par question) ; total 20 pts, plus 2 bonus de 0,5 pt (note plafonnée à 20). Résultats contrôlés avec Python/sympy (`build/verif_lot1.py`, `build/verif_lot1_geo.py`), barème recompté par le script.

Exercice 1 (12 points)

1. a. [1 pt] $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$; pour $x \rightarrow 2^-$: $x - 2 < 0$, $x - 3 < 0$, donc le dénominateur tend vers 0^+ : la limite est $+\infty$.
1. b. [1 pt] $x^3 - 3x^2 + 5x - 6 = (x - 2)(x^2 - x + 3)$ [0,5], donc la limite vaut $\frac{4-2+3}{2} = \frac{5}{2}$ [0,5].
1. c. [1 pt] $\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{x-1}{x^2-x+1} \rightarrow -\frac{2}{3}$.
1. d. [1 pt] Terme de plus haut degré : $\lim_{-\infty}(-3x^4) = -\infty$.
2. a. [1 pt] $\frac{x-2}{(\sqrt{x+7}+3)(x-1)(x-2)} = \frac{1}{(\sqrt{x+7}+3)(x-1)} \rightarrow \frac{1}{6}$.
2. b. [1 pt] $\frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1-\cos 2x}{x^2} \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^3 \rightarrow 1 \times 2 \times 1 = 2$ (car $\frac{1-\cos 2x}{x^2} = 4 \frac{1-\cos 2x}{(2x)^2} \rightarrow 2$).
2. c. [1 pt] $\frac{\sqrt{x}}{\tan 3x} = \frac{3x}{\tan 3x} \cdot \frac{1}{3\sqrt{x}}$: forme $1 \times (+\infty)$, la limite est $+\infty$.
2. d. [1 pt] $3x + \cos x \leq 3x + 1 \rightarrow -\infty$: la limite est $-\infty$.
3. a. [1 pt] $\frac{x+1}{\sqrt{9x^2+x+1}+3x} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+3} \rightarrow \frac{1}{6}$.
3. b. [1 pt] Pour $x < 0$: $\sqrt{4x^2+x+1}+2x = \frac{x+1}{-x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)} \rightarrow -\frac{1}{4}$; la limite vaut $-\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$.
4. a. [0,5 pt] Numérateur : $\frac{x^2-2x}{\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{3x+4}}$; dénominateur : $x\left(2\frac{\sin 2x}{2x}+3\frac{\tan 3x}{3x}\right)$. Le quotient vaut $\frac{x-2}{\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{3x+4}} \cdot \frac{1}{2\frac{\sin 2x}{2x}+3\frac{\tan 3x}{3x}} \rightarrow \frac{-2}{4} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{1}{10}$.
4. b. [0,5 pt] $u = x + \tan x \rightarrow 0$: $\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$ et $\frac{x+\tan x}{3x^2-2\sin x} = \frac{1+\frac{\tan x}{x}}{3x-2\frac{\sin x}{x}} \rightarrow \frac{2}{-2} = -1$. La limite est -1 .
4. c. [0,5 pt] $h = x - \frac{\pi}{3}$: $2\cos x - 1 = \cos h - 1 - \sqrt{3}\sin h$ et $4\sin^2 x - 3 = (2\sin x - \sqrt{3})(2\sin x + \sqrt{3})$ avec $2\sin x - \sqrt{3} = \sqrt{3}(\cos h - 1) + \sin h$. En divisant par h : $\frac{-h\frac{1-\cos h}{h^2}-\sqrt{3}\frac{\sin h}{h}}{-\sqrt{3}h\frac{1-\cos h}{h^2}+\frac{\sin h}{h}} \rightarrow -\sqrt{3}$, et $2\sin x + \sqrt{3} \rightarrow 2\sqrt{3}$: la limite vaut $-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$.
4. d. [0,5 pt] $\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2} + \frac{\sqrt{3x+3}-3}{x-2} = \frac{3}{\sqrt{3x-2}+2} + \frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} \rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$.

Exercice 2 (8 points)

1. [1 pt] $AC = AB$ et $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{3}$: $r(C) = B$ [0,5]. $AN = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3}AB = AM$ et $(\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{AM}) \equiv (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{3}$: $r(N) = M$ [0,5].
2. a. [1 pt] AIM équilatéral, I à l'extérieur (côté opposé à C par rapport à (AB)) : $AI = AM$ et $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AI}) \equiv \frac{\pi}{3}$, donc $r(M) = I$. De même $AJ = AN$ et $(\overrightarrow{AJ}; \overrightarrow{AN}) \equiv \frac{\pi}{3}$, donc $r(J) = N$.
2. b. [1 pt] $r(J) = N$ et $r(M) = I$; la rotation conserve les distances : $JM = NI$.
2. c. [1 pt] $r(A) = A$, $r(C) = B$, $r(M) = I$: l'image du triangle ACM est le triangle ABI .
3. [1 pt] La rotation conserve le milieu : D milieu de $[CM] \implies K = r(D)$ milieu de $[r(C)r(M)] = [BI]$.

4. a. [1 pt] $r((MN)) = (r(M)r(N)) = (IM)$ et $r((CJ)) = (r(C)r(J)) = (BN)$ [0,5]. La rotation conserve l'intersection : $r(E) = (IM) \cap (BN) = F$ [0,5].

4. b. [1 pt] $r(E) = F$ et $r(A) = A : AE = AF$ et $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{3}$. Le triangle AEF est isocèle en A avec un angle de 60° : il est **équilatéral**.

5. [1 pt] Soit $MNPQ$ un carré et M', N', P', Q' les images. La rotation conserve les distances : $M'N' = N'P' = P'Q' = Q'M'$; elle conserve les angles orientés : $(\overrightarrow{M'N'}; \overrightarrow{M'Q'}) \equiv (\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MQ}) \equiv \pm \frac{\pi}{2}$. Un losange ayant un angle droit est un carré : $M'N'P'Q'$ est un carré.

Questions bonus

1. [+0,5] $1 - \cos x \cos 2x = (1 - \cos x) + \cos x(1 - \cos 2x)$, donc $\frac{1 - \cos x \cos 2x}{x^2} = \frac{1 - \cos x}{x^2} + \cos x \cdot 4 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} \rightarrow \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

2. [+0,5] D'après le théorème de décomposition, $S_{(\Delta)} \circ S_{(AC)} = r\left(A; 2\left(\overrightarrow{AC}; \vec{u}\right)\right)$ si (Δ) passe par A et a pour vecteur directeur $\vec{u}$. Il faut $(\overrightarrow{AC}; \vec{u}) \equiv \frac{\pi}{6} [\pi] : (\Delta)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{CAB}$, c'est-à-dire la droite (AA_1) où A_1 est le milieu de $[BC]$.