

Corrigé du devoir maison n° 4

Géométrie de l'espace (Ch. 15 à 17)

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — méthodes

Les méthodes sont celles des cours et séries des chapitres 15 à 17 : relation de Chasles et barycentres (centre de gravité), coplanarité par déterminant, élimination des paramètres, distance d'un point à un plan $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, distance d'un point à une droite $\frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$, complétion des carrés pour les sphères. Tous les résultats ont été contrôlés avec Python/sympy (`build/verif_lot4.py`).

Exercice 1

1. Chasles de deux façons : $\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AD} + \vec{DJ}$ et $\vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{BC} + \vec{CJ}$. En additionnant, avec $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ et $\vec{DJ} + \vec{CJ} = \vec{0}$ (milieu) : $2\vec{IJ} = \vec{AD} + \vec{BC}$. Ainsi $\vec{IJ}$ est combinaison linéaire de $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$: les trois vecteurs sont coplanaires.

2. On introduit A dans la relation définissant G : $4\vec{GA} + \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{0}$, d'où $\vec{AG} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$. Par ailleurs, $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ et $\vec{AJ} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AD})$, donc $\frac{1}{2}(\vec{AI} + \vec{AJ}) = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}) = \vec{AG}$: G est le milieu de $[IJ]$.

3. K centre de gravité de BCD : $\vec{KB} + \vec{KC} + \vec{KD} = \vec{0}$, donc (en introduisant A) $\vec{AK} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$. Donc $\vec{AG} = \frac{1}{4} \times 3\vec{AK} = \frac{3}{4}\vec{AK}$: les vecteurs $\vec{AG}$ et $\vec{AK}$ sont colinéaires, les points A, G, K sont alignés (G est situé aux trois quarts de $[AK]$ à partir de A).

4. a. $P\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right)$, $Q\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$, $R_\alpha(0; 0; \alpha)$ et, d'après 2., $G\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

4. b. $G \in (PQR_\alpha) \iff \vec{PG}, \vec{PQ}, \vec{PR}_\alpha$ coplanaires $\iff \det(\vec{PQ}; \vec{PR}_\alpha; \vec{PG}) = 0$. Avec $\vec{PQ}\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 0\right)$, $\vec{PR}_\alpha\left(-\frac{1}{3}; 0; \alpha\right)$, $\vec{PG}\left(-\frac{1}{12}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \alpha & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}\left(0 - \frac{\alpha}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - 0\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{\alpha}{2} - 0\right) = \frac{\alpha}{12} + \frac{1}{24} - \frac{\alpha}{24} = \frac{\alpha+1}{24}$$

(développement selon la première ligne). Donc $G \in (PQR_\alpha) \iff \alpha + 1 = 0 \iff \alpha = -1$. Contrôle par une seconde méthode : (PQR_α) a pour équation $3x + 2y + \frac{z}{\alpha} = 1$ (les trois points non alignés la vérifient) et $\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4\alpha} = 1 \iff \alpha = -1$. Interprétation : $\vec{AR}_{-1} = -\vec{AD}$, donc R_{-1} est le symétrique de D par rapport à A .

Exercice 2

1. a. $\vec{AB}(1; 1; -1)$ et $\vec{AC}(-1; 1; 1)$: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires et A, B, C définissent un plan. $M \in (ABC) \iff \vec{AM} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$:

$$x = 1 + \alpha - \beta, \quad y = \alpha + \beta, \quad z = 1 - \alpha + \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

1. b. En additionnant la première et la troisième équation : $x + z = 2$. Réciproquement, si $x + z = 2$, on pose $\alpha = \frac{x-1+y}{2}$ et $\beta = \frac{y-x+1}{2}$: on retrouve x, y et $z = 2 - x$. Donc (ABC) : $x + z - 2 = 0$ (contrôle : $1 + 1 - 2 = 2 + 0 - 2 = 0 + 2 - 2 = 0$).

2. $M_t \in (ABC) \iff (m+t) + mt - 2 = 0 \iff (1+m)t = 2 - m$. Disjonction de cas :

— si $m = -1$: l'équation devient $0 \times t = 3$, sans solution ; (D_{-1}) est strictement parallèle à (ABC) (son vecteur directeur $(1; -1; -1)$ vérifie bien $1 + (-1) = 0$) ;

— si $m \neq -1$: une unique solution $t = \frac{2-m}{1+m}$; (D_m) coupe (ABC) au point $\left(\frac{m^2+2}{m+1}; \frac{2m-1}{m+1}; \frac{m(2-m)}{m+1}\right)$.

3. Les vecteurs normaux $(1; 0; 1)$ et $(1; -1; 2)$ ne sont pas colinéaires : les plans sont sécants selon une droite. On résout le système en prenant $z = s$ comme paramètre : $x = 2 - s$, puis $y = x + 2z - 1 = 1 + s$. Donc (Δ) : $x = 2 - s$, $y = 1 + s$, $z = s$ ($s \in \mathbb{R}$) ; elle passe par $B(2; 1; 0)$ et est dirigée par $\vec{w}(-1; 1; 1)$.

4. Un point commun aux trois plans est un point de (Δ) appartenant à (R) : $2(2-s) + (1+s) + s - 4 = 0 \iff 1 = 0$, impossible. L'intersection des trois plans est **vide**. Pourtant (R) et (ABC) ne sont pas parallèles (vecteurs normaux $(2; 1; 1)$ et $(1; 0; 1)$ non colinéaires), et de même pour (R) et (Q) . Interprétation : $\vec{w} \cdot (2; 1; 1) = -2 + 1 + 1 = 0$, donc (Δ) est strictement parallèle à (R) ; les trois plans se coupent deux à deux selon trois droites parallèles (configuration des faces latérales d'un prisme).

Exercice 3

1. Méthode 1 : (Π) passe par le milieu $I(2; 0; 1)$ de $[AB]$ et admet $\vec{AB}(2; 2; 2)$ pour vecteur normal : $2(x-2) + 2y + 2(z-1) = 0 \iff x + y + z - 3 = 0$. Méthode 2 : $M \in (\Pi) \iff MA^2 = MB^2$; or, en développant,

$$MA^2 - MB^2 = [(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2] - [(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2] = 4x + 4y + 4z - 12,$$

d'où la même équation $x + y + z - 3 = 0$.

2. (AB) passe par A et est dirigée par $\vec{u}(1; 1; 1)$. $\vec{AO} \wedge \vec{u} = (-1; 1; 0) \wedge (1; 1; 1) = (1; 1; -2)$, de norme $\sqrt{6}$, d'où $d(O; (AB)) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$. Projeté : $K = A + \lambda \vec{u}$ avec $\vec{OK} \cdot \vec{u} = 0 \iff (1+\lambda) + (-1+\lambda) + \lambda = 0 \iff \lambda = 0$: $K = A$. Contrôle : $\vec{OA} \cdot \vec{AB} = 2 - 2 + 0 = 0$ et $OA = \sqrt{2}$.

3. D'après le calcul du 1. : $MA^2 - MB^2 = 4 \iff 4x + 4y + 4z - 12 = 4 \iff x + y + z - 4 = 0$. (E) est un plan de même vecteur normal que (Π) , distinct de (Π) : il est strictement parallèle à (Π) .

4. a. Avec I milieu de $[AB]$: $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - IA^2$. Donc $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \iff MI = IA = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$: (Σ) est la sphère de diamètre $[AB]$, de centre $I(2; 0; 1)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

4. b. $d(I; (P)) = \frac{|2-0+1|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$: égale au rayon, donc (P) est tangent à (Σ) . Le point de contact est le projeté de I sur (P) : $I + \lambda(1; -1; 1) \in (P) \iff 3 + 3\lambda = 0 \iff \lambda = -1$: point $(1; 1; 0)$ (contrôle : $1 + 1 + 1 = 3$).

Exercice 4

1. En complétant les carrés : $M \in (S_m) \iff (x-m)^2 + (y+m)^2 + (z-1)^2 = m^2 + m^2 + 1 - (2m^2 + m - 3) = 4 - m$. Disjonction de cas : si $m < 4$, (S_m) est la sphère de centre $\Omega_m(m; -m; 1)$ et de rayon $R_m = \sqrt{4-m}$; si $m = 4$, $(S_4) = \{(4; -4; 1)\}$ (un point) ; si $m > 4$, $(S_m) = \emptyset$.

2. $\vec{O\Omega_m} = \vec{k} + m(\vec{i} - \vec{j})$: Ω_m est le point de paramètre $s = m$ de la droite $x = s$, $y = -s$, $z = 1$ ($s \in \mathbb{R}$). Lorsque m décrit $] -\infty; 4[$, Ω_m décrit la demi-droite ouverte formée des points de paramètre $s < 4$, d'origine $(4; -4; 1)$ exclue.

3. Le plan (xOy) a pour équation $z = 0$; $d(\Omega_m; (xOy)) = |1| = 1$. Tangence $\iff R_m = 1 \iff 4 - m = 1 \iff m = 3$.

4. $O \in (S_m) \iff 2m^2 + m - 3 = 0 \iff (m-1)(2m+3) = 0 \iff m = 1$ ou $m = -\frac{3}{2}$; ces deux valeurs sont < 4 , ce sont bien des sphères.

5. $m - m + 1 - 1 = 0$: $\Omega_m \in (P)$ pour tout m , donc $d(\Omega_m; (P)) = 0 < R_m$. $(P) \cap (S_m)$ est un « grand cercle » de centre $\Omega_m(m; -m; 1)$ et de rayon $\sqrt{4-m}$.

Exercice 5 (problème de synthèse)

1. $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $F(1; 0; 1)$, $G(1; 1; 1)$, $H(0; 1; 1)$.

2. a. $\vec{AG}(1; 1; 1)$, $\vec{BD}(-1; 1; 0)$, $\vec{BE}(-1; 0; 1)$: $\vec{AG} \cdot \vec{BD} = 0$ et $\vec{AG} \cdot \vec{BE} = 0$. $\vec{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDE) , il lui est donc normal. (BDE) : $x + y + z + d = 0$ et $B \in (BDE) \Rightarrow d = -1$: (BDE) : $x + y + z - 1 = 0$.

2. b. $d(A; (BDE)) = \frac{|-1|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $d(G; (BDE)) = \frac{|3-1|}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

- 3. a.** $BD = \sqrt{2}$, $BE = \sqrt{2}$, $DE = \|(0; -1; 1)\| = \sqrt{2}$: triangle équilatéral de côté $\sqrt{2}$, d'aire $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 3. b.** Base ABD (aire $\frac{1}{2}$), hauteur $AE = 1$: $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$. Base BDE , hauteur $d(A; (BDE))$: $V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{6}$. Les deux calculs concordent.
- 4.** $\overrightarrow{AF}(1; 0; 1)$, $\overrightarrow{AH}(0; 1; 1)$: $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AH} = 1$ et $AF = AH = \sqrt{2}$, d'où $\cos \widehat{FAH} = \frac{1}{2}$ et $\widehat{FAH} = \frac{\pi}{3}$. Le triangle AFH est isocèle en A avec un angle de $\frac{\pi}{3}$: il est équilatéral.
- 5. a.** (ABD) : $z = 0$, (ABE) : $y = 0$, (ADE) : $x = 0$. La distance de Ω_t à chacun de ces plans vaut $|t| = t$, c'est-à-dire le rayon : (Σ_t) est tangente aux trois plans.
- 5. b.** Comme $0 < t < \frac{1}{3}$, $3t - 1 < 0$ et $d(\Omega_t; (BDE)) = \frac{1-3t}{\sqrt{3}}$. Tangence $\iff \frac{1-3t}{\sqrt{3}} = t \iff 1 = (3 + \sqrt{3})t \iff t = \frac{1}{3+\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$. Cette valeur ($\approx 0,21$) est bien dans $]0; \frac{1}{3}[$: la sphère inscrite a pour centre $\Omega\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}; \frac{3-\sqrt{3}}{6}; \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$ et pour rayon $r = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$.
- 5. c.** Le centre Ω est intérieur au tétraèdre, à la distance r de chaque face : $ABDE$ se découpe en quatre tétraèdres de sommet Ω , de bases les faces et de hauteur r . D'où $V = \frac{1}{3}r(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4) = \frac{1}{3}r\mathcal{A}$. Ici $\mathcal{A} = 3 \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$, donc $r = \frac{3V}{\mathcal{A}} = \frac{1/2}{(3+\sqrt{3})/2} = \frac{1}{3+\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$: on retrouve le résultat du b.