

Corrigé du devoir maison n° 3

Dénombrement — Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — méthodes

Les méthodes sont celles du cours et de la série du chapitre 14 : combinaisons linéaires, congruences, disjonction de cas sur les restes, PGCD (algorithme d'Euclide, décomposition en facteurs premiers). Tous les résultats ont été contrôlés avec Python/sympy (`build/verif_lot3.py`).

Exercice 1

1. **a.** $a \equiv 2 [11]$ et $b \equiv 7 [11] \implies a + b \equiv 9 [11]$ et $a - b \equiv -5 \equiv 6 [11]$. Les restes sont 9 et 6.
1. **b.** $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \equiv 9 \times 6 = 54 = 44 + 10 \equiv 10 [11]$: reste 10.
2. **a.** $n^2 + n + 1 = (n + 1) \times n + 1$ et $0 \leq 1 < n + 1$ (car $n \geq 1$). Par unicité de la division euclidienne, le reste est 1 (quotient n).
2. **b.** $4^n + 3 = (2^n)^2 - 1 + 4 = (2^n + 1)(2^n - 1) + 4$. Cas 1 : $n \geq 2$: $2^n + 1 \geq 5 > 4$, donc $0 \leq 4 < 2^n + 1$ et le reste est 4 (quotient $2^n - 1$). Cas 2 : $n = 1$: $4^1 + 3 = 7 = 3 \times 2 + 1$: le reste est 1.
3. $(n + 2)^2 = n^2 + 4n + 4 = (n + 3)(n + 1) + 1$ et $0 \leq 1 < n + 3$: le reste est 1.

Exercice 2

1. Raisonnement direct : $n + (n + 1) + (n + 2) = 3(n + 1)$ avec $n + 1 \in \mathbb{Z}$: c'est un multiple de 3.
2. **a.** $(x - y)(x + y) = 9$. Les nombres $x - y$ et $x + y$ ont même parité (leur somme est $2x$) ; on pose $x - y = d$ et $x + y = \frac{9}{d}$ avec $d \in \{\pm 1; \pm 3; \pm 9\}$, d'où $x = \frac{d+9/d}{2}$ et $y = \frac{9/d-d}{2}$: $S = \{(5; 4); (5; -4); (-5; -4); (-5; 4); (3; 0); (-3; 0)\}$.
2. **b.** 401 est premier, donc $d \in \{\pm 1; \pm 401\}$: $S = \{(201; 200); (201; -200); (-201; -200); (-201; 200)\}$.
3. Raisonnement direct : $n - 2$ multiple de 7 $\implies n \equiv 2 [7] \implies n^3 - 1 \equiv 8 - 1 = 7 \equiv 0 [7]$.
4. $2^6 = 64 \equiv -1 [13]$ donc $2^{12} \equiv 1 [13]$; $70 = 12 \times 5 + 10$: $2^{70} \equiv 2^{10} = 2^6 \times 2^4 \equiv -16 \equiv 10 [13]$. $3^3 = 27 \equiv 1 [13]$ et $70 = 3 \times 23 + 1$: $3^{70} \equiv 3 [13]$. Donc $2^{70} + 3^{70} \equiv 13 \equiv 0 [13]$.
5. **a.** $n + 5 = (n - 2) + 7$: $n - 2$ divise $n + 5 \iff n - 2$ divise 7 $\iff n - 2 \in \{-7; -1; 1; 7\}$. Comme $n \in \mathbb{N}$, $n - 2 \geq -2$: $n \in \{1; 3; 9\}$.
5. **b.** $n \equiv -1 [n + 1]$ donc $n^3 + 2 \equiv -1 + 2 = 1 [n + 1]$. Ainsi $n + 1$ divise $n^3 + 2 \iff n + 1$ divise 1 $\iff n + 1 = 1 \iff n = 0$.
6. $xy - 5x - 3y + 18 = 0 \iff (x - 3)(y - 5) = 15 - 18 = -3$. Donc $x - 3 \in \{-3; -1; 1; 3\}$ et $y - 5 = \frac{-3}{x-3}$: $S = \{(0; 6); (2; 8); (4; 2); (6; 4)\}$.

Exercice 3

1. Raisonnement par disjonction de cas. Si 7 ne divise pas n , alors $n \equiv \pm 1, \pm 2$ ou $\pm 3 [7]$. Cas 1 : $n \equiv \pm 1$: $n^2 \equiv 1$, $n^6 \equiv 1 [7]$. Cas 2 : $n \equiv \pm 2$: $n^2 \equiv 4$, $n^6 \equiv 64 \equiv 1 [7]$. Cas 3 : $n \equiv \pm 3$: $n^2 \equiv 2$, $n^6 \equiv 8 \equiv 1 [7]$. Dans tous les cas 7 divise $n^6 - 1$.
2. **a.** $3^3 = 27 = 2 \times 13 + 1 \equiv 1 [13]$, donc $3^{3n} = (3^3)^n \equiv 1 [13]$.
2. **b.** $3^{3n+2} + 3^{3n+1} + 1 = 3^{3n} \times 9 + 3^{3n} \times 3 + 1 \equiv 9 + 3 + 1 = 13 \equiv 0 [13]$.
3. $32 \equiv 4 [7]$ et $4^3 = 64 \equiv 1 [7]$; $45 = 3 \times 15$, donc $32^{45} \equiv (4^3)^{15} \equiv 1 [7]$: reste 1.

Exercice 4

1. **a.** Disjonction de cas suivant le reste $r \in \{0; \dots; 7\}$ de n modulo 8 : r^2 vaut 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, c'est-à-dire 0, 1, 4, 1, 0, 1, 4, 1 modulo 8.
1. **b.** Raisonnement par l'absurde. Supposons $a = x^2 + y^2 + z^2$ avec $x, y, z \in \mathbb{Z}$. D'après a., chaque carré est congru à 0, 1 ou 4 modulo 8 ; les sommes possibles de trois de ces valeurs sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (et $8 \equiv 0$, $9 \equiv 1$, $12 \equiv 4$) modulo 8, jamais 7. Cela contredit $a \equiv 7 [8]$.
2. **a.** On teste les 13 restes : seuls $x \equiv 2$ ($4 + 2 + 7 = 13$) et $x \equiv 10$ ($100 + 10 + 7 = 117 = 9 \times 13$) conviennent. $S = \{13k + 2 ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{13k + 10 ; k \in \mathbb{Z}\}$.
2. **b.** $2x + 11$ est impair, donc n'est pas divisible par 8 : $S = \emptyset$.
2. **c.** $5 \times 5 = 25 \equiv 1 [8] : 5x \equiv 1 [8] \iff 25x \equiv 5 [8] \iff x \equiv 5 [8]$. $S = \{8k + 5 ; k \in \mathbb{Z}\}$.
3. Raisonnement par l'absurde. Supposons qu'un entier x vérifie le système. $x \equiv 3 [12] \implies x \equiv 0 [3]$ (car 3 divise 12 et 3) ; $x \equiv 5 [9] \implies x \equiv 2 [3]$. Donc $0 \equiv 2 [3]$: contradiction. Le système n'a pas de solution.
4. $x^2 - 2x - 7 = (x - 1)^2 - 8 = (x - 1)^2 - 3$. Les carrés de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sont $\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}$; $\bar{3}$ n'est pas un carré. L'équation n'a pas de solution : $S = \emptyset$.

Exercice 5

1. $624 = 2^4 \times 3 \times 13 : (4 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 20$ diviseurs positifs.
2. Division euclidienne par 4 : $p = 4k + r$, $r \in \{0; 1; 2; 3\}$. Cas $r = 0$ ou $r = 2$: p serait pair et ≥ 3 , donc divisible par 2 et différent de 2 : il ne serait pas premier, contradiction. Donc $r = 1$ ou $r = 3$.
3. $x = 2025(n + 1) + 2 \sum_{k=0}^n k = 2025(n + 1) + n(n + 1) = (n + 1)(n + 2025)$. Comme $n \geq 1$, on a $n + 1 \geq 2$ et $n + 2025 \geq 2$: x admet le diviseur $n + 1$ différent de 1 et de x , donc x n'est pas premier.
4. $d = \text{PGCD}(p; n)$ est un diviseur positif de p , donc $d = 1$ ou $d = p$. Si $d = p$, alors p divise n , ce qui est exclu. Donc $d = 1$.
5. p_2 est premier et distinct de p_1 , donc p_1 ne divise pas p_2 (sinon $p_1 \in \{1; p_2\}$). D'après 4., $\text{PGCD}(p_1; p_2) = 1$.

Exercice 6

1. $604800 = 476280 \times 1 + 128520$; $476280 = 128520 \times 3 + 90720$; $128520 = 90720 \times 1 + 37800$; $90720 = 37800 \times 2 + 15120$; $37800 = 15120 \times 2 + 7560$; $15120 = 7560 \times 2 + 0$. Le dernier reste non nul est 7560 : $604800 \wedge 476280 = 7560$.
2. Méthode 1 (diviseurs) : diviseurs communs de 50 et 40 : 1, 2, 5, 10 ; donc $50 \wedge 40 = 10$. Méthode 2 (Euclide) : $50 = 40 \times 1 + 10$, $40 = 10 \times 4$: 10. Méthode 3 (décomposition) : $50 = 2 \times 5^2$, $40 = 2^3 \times 5$: $50 \wedge 40 = 2 \times 5 = 10$ et $50 \vee 40 = 2^3 \times 5^2 = 200$. Méthode 4 (relation) : $50 \vee 40 = \frac{50 \times 40}{10} = 200$; ou multiples de 50 : 50, 100, 150, 200, et 200 est le premier multiple de 40.
3. **a.** $3n^3 - 11n = (n + 3)(3n^2 - 9n + 16) - 48$ (vérification par développement). Donc $(3n^3 - 11n) \wedge (n + 3) = (n + 3) \wedge (-48) = (n + 3) \wedge 48$.
3. **b.** $\frac{3n^3 - 11n}{n + 3} \in \mathbb{N} \iff n + 3$ divise $3n^3 - 11n$ et $3n^3 - 11n \geq 0 \iff n + 3$ divise 48 et $3n^3 - 11n \geq 0$. Avec $n + 3 \geq 3 : n + 3 \in \{3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}$, soit $n \in \{0; 1; 3; 5; 9; 13; 21; 45\}$. Pour $n = 1 : 3 - 11 = -8 < 0$, exclu. Les autres conviennent ($3n^3 - 11n = n(3n^2 - 11) \geq 0$ pour $n = 0$ ou $n \geq 2$). Ensemble : $\{0; 3; 5; 9; 13; 21; 45\}$.
4. **a.** $\delta = (n - 1) \wedge (n - 5)$ divise $(n - 1) - (n - 5) = 4$.
4. **b.** Si n est pair, $n - 1$ est impair, donc δ est impair ; c'est un diviseur positif impair de 4 : $\delta = 1$.
5. $a = 5^n(25 - 1) = 2^3 \times 3 \times 5^n$ et $b = 7^n(49 - 1) = 2^4 \times 3 \times 7^n$. Donc $a \wedge b = 2^3 \times 3 = 24$ et $a \vee b = 2^4 \times 3 \times 5^n \times 7^n = 48 \times 35^n$.
6. $(E_1) : x = 10x', y = 10y'$ avec $x' \wedge y' = 1$ et $x' + y' = 10 : (x'; y') \in \{(1; 9); (3; 7); (7; 3); (9; 1)\}$ ((5; 5), (2; 8), (4; 6)... exclus car non premiers entre eux). $S_1 = \{(10; 90); (30; 70); (70; 30); (90; 10)\}$. $(E_2) : on pose $d = x \wedge y$, $x = dx', y = dy'$, $x' \wedge y' = 1$, d'où $x \vee y = dx'y'$. L'équation devient $d + dx'y' = dx' + dy' \iff 1 + x'y' - x' - y' = 0 \iff (x' - 1)(y' - 1) = 0 \iff x' = 1$ ou $y' = 1 \iff x$ divise y ou y divise x . $S_2 = \{(x; y) \in (\mathbb{N}^*)^2 / x \text{ divise } y \text{ ou } y \text{ divise } x\}$.$