

Corrigé du devoir maison n° 2

Dérivation — Étude de fonctions

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — méthodes

Les méthodes sont celles des chapitres 11 (nombre dérivé, tangente, approximation affine, signe de la dérivée) et 12 (branches infinies, concavité, symétries, lecture graphique). Toutes les valeurs ont été contrôlées avec Python/sympy (`build/verif_lot2.py`).

Exercice 1

- $x^2 - 16 \neq 0 \iff x \neq \pm 4 : D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4; 4\}$.
- $\lim_{\pm\infty} f = \lim_{\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$. En 4 : le numérateur tend vers 32 et $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4) \rightarrow 0^+$ si $x \rightarrow 4^+$, 0^- si $x \rightarrow 4^-$: $\lim_{4^+} f = +\infty$, $\lim_{4^-} f = -\infty$. En -4 : $x^2 - 16 \rightarrow 0^+$ si $x \rightarrow -4^-$, 0^- si $x \rightarrow -4^+$: $\lim_{-4^-} f = +\infty$, $\lim_{-4^+} f = -\infty$.
- $f'(x) = \frac{2x(x^2-16)-(x^2+16)2x}{(x^2-16)^2} = \frac{2x(-32)}{(x^2-16)^2} = \frac{-64x}{(x^2-16)^2}$.
- $f'(x)$ a le signe de $-x$; $f(0) = -1$.

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	0	-		-	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ $+\infty$	$\searrow$	1

- Sur l'intervalle $] -4; 4[$, f est croissante sur $] -4; 0]$ et décroissante sur $[0; 4[$: $f(0) = -1$ est sa valeur maximale, d'où $f(x) \leq -1$.
- $f(2) = \frac{20}{-12} = -\frac{5}{3}$ et $f'(2) = \frac{-128}{144} = -\frac{8}{9}$. La tangente a pour équation $y = -\frac{8}{9}(x - 2) - \frac{5}{3} = -\frac{8}{9}x + \frac{16}{9} - \frac{15}{9} = -\frac{8}{9}x + \frac{1}{9}$.

Exercice 2

- $D_f = [-3; +\infty[$.
- Pour $x > -3$: $\frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \frac{\sqrt{x+3}}{x+3} = \frac{1}{\sqrt{x+3}} \rightarrow +\infty$. f n'est pas dérivable à droite en -3 : $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $(-3; 0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.
- $D_{f'} =] -3; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$.
- $f(6) = 3$, donc $\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6} = \frac{f(x)-f(6)}{x-6} \rightarrow f'(6) = \frac{1}{6}$.
- $f(1) = 2$, $f'(1) = \frac{1}{4}$: $g(x) = f'(1)(x - 1) + f(1) = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$.
- $\sqrt{4,002} = f(1,002) \approx g(1,002) = 2 + \frac{0,002}{4} = 2,0005$.
- Soit $k(x) = \sqrt{1+x}$: $k(0) = 1$, $k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, $k'(0) = \frac{1}{2}$. L'approximation affine au voisinage de 0 donne $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$.

Exercice 3

- Sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2x^2 - 2x + 4$.
- Sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$: $f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2}$.
- Sur $]0; +\infty[$: $f'(x) = 3x^2\sqrt{x} + x^3\frac{1}{2\sqrt{x}} = 3x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2\sqrt{x} = \frac{7}{2}x^2\sqrt{x}$ (f est aussi dérivable à droite en 0, $f'_d(0) = 0$).
- Sur $]0; \pi[$, $\sin x \neq 0$: $f'(x) = \frac{-\sin x \sin^2 x - \cos x \cdot 2 \sin x \cos x}{\sin^4 x} = \frac{-\sin^2 x - 2 \cos^2 x}{\sin^3 x} = -\frac{1 + \cos^2 x}{\sin^3 x}$.

5. Sur $] -\infty; -2[$ et $] -2; +\infty[$: $f'(x) = \frac{(6x+1)(x+2)-(3x^2+x-2)}{(x+2)^2} = \frac{3x^2+12x+4}{(x+2)^2}$.

6. Pour $x > 0$, $\sin x < x$ (exercice 14 de la série 11), donc $x + \sin x > 0$: $f'(x) = -\frac{1+\cos x}{(x+\sin x)^2}$.

7. $x^2 + 5 > 0$: sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$.

8. Sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 4(2x-3)(x^2-3x+1)^3$.

Exercice 4

1. La tangente en S est horizontale : $f'(1) = 0$. La tangente en A passe par $A(-1;0)$ et $(0;-4)$: $f'(-1) = \frac{-4-0}{0+1} = -4$. La tangente en B passe par $B(3;0)$ et $(4;4)$: $f'(3) = 4$.

2.

x	-2		1		4
$f(x)$	5	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5

3.

x	-2		1		4
$f'(x)$		-	0	+	

Exercice 5

1. Soit $\varphi(x) = \tan x - x$ sur $[0; \frac{\pi}{2}[$: $\varphi'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x \geq 0$, donc φ est croissante et $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$: $\tan x \geq x$.

2. $g'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$. Sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, $\cos$ est strictement décroissante de 1 à 0 et $0 < \frac{2}{\pi} < 1$: il existe un unique $x_0 \in]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $\cos x_0 = \frac{2}{\pi}$; $g' > 0$ sur $[0; x_0[$ et $g' < 0$ sur $]x_0; \frac{\pi}{2}]$. Donc g croît sur $[0; x_0]$ à partir de $g(0) = 0$, puis décroît sur $[x_0; \frac{\pi}{2}]$ jusqu'à $g(\frac{\pi}{2}) = 1 - 1 = 0$. Ainsi $g(x) \geq 0$ sur $[0; x_0]$ (car $g(x) \geq g(0)$) et sur $[x_0; \frac{\pi}{2}]$ (car $g(x) \geq g(\frac{\pi}{2})$) : $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$.

3. Soit $k(x) = x + \frac{1}{x}$: $k'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} > 0$ sur $]1; +\infty[$, donc k est strictement croissante sur $[1; +\infty[$. Comme $2027 > 2026 \geq 1$: $k(2027) > k(2026)$, c'est-à-dire $2027 + \frac{1}{2027} > 2026 + \frac{1}{2026}$.

Exercice 6

1. $x^2 + 4 > 0$, donc $D_f = \mathbb{R}$. $\lim_{\pm\infty} \frac{4x}{x^2+4} = \lim_{\pm\infty} \frac{4}{x} = 0$, donc $\lim_{\pm\infty} f = 1$: la droite $y = 1$ est asymptote horizontale au voisinage de $\pm\infty$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$: $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \frac{-4x}{x^2+4} + 1 = 2 - f(x)$, soit $f(2 \times 0 - x) = 2 \times 1 - f(x)$: $I(0;1)$ est centre de symétrie.

3. a. $f'(x) = \frac{4(x^2+4)-4x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$.

b. $f(-2) = 0$, $f(2) = 2$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

4. a. Avec $u = 16 - 4x^2$ et $v = (x^2 + 4)^2$: $f''(x) = \frac{-8x(x^2+4)^2 - (16-4x^2) \cdot 4x(x^2+4)}{(x^2+4)^4} = \frac{-8x(x^2+4) - 4x(16-4x^2)}{(x^2+4)^3} = \frac{8x^3 - 96x}{(x^2+4)^3} = \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}$.

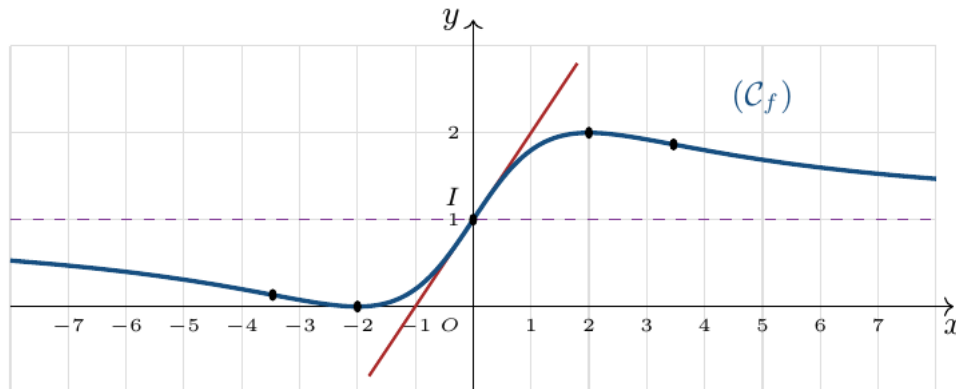
b. f'' a le signe de $x(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})$:

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		0		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$(\mathcal{C}_f)$		concave		convexe		concave		convexe	

f'' s'annule en changeant de signe en $-2\sqrt{3}$, 0 et $2\sqrt{3}$: points d'inflexion $\left(-2\sqrt{3}; 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $I(0; 1)$ et $\left(2\sqrt{3}; 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

5. $f'(0) = 1$: (T) : $y = x + 1$.

6. (Repère orthogonal : unité verticale 1,5 fois l'unité horizontale.)



7. f prend ses valeurs dans $[0; 2]$. Si $m < 0$ ou $m > 2$: aucune solution ; si $m = 0$: une solution ($x = -2$) ; si $0 < m < 1$: deux solutions (dans $] -\infty; -2[$ et $] -2; 0[$) ; si $m = 1$: une solution ($x = 0$, car $f(x) \neq 1$ pour $x \neq 0$) ; si $1 < m < 2$: deux solutions (dans $]0; 2[$ et $]2; +\infty[$) ; si $m = 2$: une solution ($x = 2$).

8. $g(x) = f(x)$ pour $x \geq 0$ et g est paire : (C_g) est formée de la partie de (C_f) d'abscisses positives et de sa symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. (C_h) est la symétrique de (C_f) par rapport à l'axe des abscisses.

Exercice 7

1. $D_f = \mathbb{R}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 1$.

2. Au voisinage de $-\infty$: $\lim f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (branche parabolique de direction (Ox)). Au voisinage de $+\infty$: $\lim f = 1$, asymptote horizontale $y = 1$.

3. a. Non : $f'_g(1) = 3 \neq -1 = f'_d(1)$ ($(1; 2)$ est un point anguleux).

b. Non : la demi-tangente à gauche en $(-1; -1)$ est verticale, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)+1}{x+1} = -\infty$ (la courbe arrive d'en haut).

c. La demi-tangente à droite en $(-1; -1)$ est horizontale : $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)+1}{x+1} = 0 = f'_d(-1)$.

d. $f'_g(1) = 3$ et $f'_d(1) = -1$.

e. $f'(0) = \frac{3}{2}$.

4. Non. Sur $] -\infty; -1[$ la courbe est concave, sur $] -1; 1[$ convexe, sur $]1; +\infty[$ convexe ; le seul changement de concavité a lieu au point $(-1; -1)$, où la courbe n'admet pas de tangente (demi-tangentes verticale et horizontale) : ce n'est pas un point d'inflexion.

5. Avec l'axe des abscisses : $(-2; 0)$ et $(\beta; 0)$ avec $0 < \beta < 1$; avec l'axe des ordonnées : $(0; f(0))$ avec $f(0) \approx -0,25$.

6.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

7.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$-$	

8. Si $m < -1$: aucune solution ; $m = -1$: une solution ($x = -1$) ; $-1 < m \leq 1$: deux solutions (une dans $] -\infty; -1[$, une dans $] -1; 1[$; la valeur 1 n'est pas atteinte sur $]1; +\infty[$) ; $1 < m < 2$: trois solutions ; $m = 2$: deux solutions ($x = 1$ et une dans $] -\infty; -1[$) ; $m > 2$: une solution (dans $] -\infty; -1[$).