

Corrigé du devoir maison n° 1

Limite d'une fonction — Rotation

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — méthodes

Les méthodes sont celles du cours et de la série du chapitre 09 (factorisation, conjuguée, limites trigonométriques usuelles, encadrement) et du chapitre 10 (propriétés de conservation, composition et décomposition). Toutes les valeurs ont été contrôlées avec Python/sympy (build/verif_lot1.py, build/verif_lot1_geo.py).

Exercice 1

1. $\frac{3x^2}{-2x^3} = -\frac{3}{2x} \rightarrow 0$. 2. $\frac{(x-1)(x-4)}{-(x-1)(3x-1)} = \frac{x-4}{-(3x-1)} \rightarrow \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$. 3. $\lim_{+\infty}(-x^5) = -\infty$. 4. $4 - 16 - 1 = -13$.
 5. $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) \rightarrow 0^+$ quand $x \rightarrow 3^+$ et $x^2 - 2x \rightarrow 3$: la limite est $+\infty$.
 6. $(x+5)(\sqrt{x} + \sqrt{5}) \rightarrow 10 \times 2\sqrt{5} = 20\sqrt{5}$. 7. $\frac{5(x-1)}{(x-1)(\sqrt{5x+4}+3)} \rightarrow \frac{5}{6}$.
 8. $\frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} \cdot \frac{\sqrt{3x-2}+2}{3(x-2)} \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$. 9. $\frac{2(x-1)}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}} \cdot \frac{\sqrt{x+8}+3}{x-1} \rightarrow \frac{2}{4} \times 6 = 3$.
 10. $\frac{2-x}{3+\sqrt{x+7}} \cdot \frac{2+\sqrt{3x-2}}{3(2-x)} \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{9}$.
 11. $7\frac{\sin 7x}{7x} \rightarrow 7$. 12. $\frac{3}{5} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} \rightarrow \frac{3}{5}$. 13. $\frac{\sin 6x}{6x} \cdot \frac{4x}{\tan 4x} \cdot \frac{3}{2} \rightarrow \frac{3}{2}$. 14. $\frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}$. 15. $x \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} \rightarrow 0$.
 16. $X = \frac{3}{x} \rightarrow 0^+ : x^2(1 - \cos X) = 9\frac{1-\cos X}{X^2} \rightarrow \frac{9}{2}$. 17. $X = \frac{2}{x} : 2\frac{\tan X}{X} \rightarrow 2$.
 18. Pour $x \in]\frac{\pi}{2}; \pi[: \sin x \rightarrow 1$ et $\cos x \rightarrow 0^-$, donc $\tan x \rightarrow -\infty$.
 19. Pour $x < 0 : \sqrt{x^2 - 4x + 1} + x = \frac{-4x+1}{-x(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}+1})} \rightarrow 2$; la limite vaut $2 - 3 = -1$.
 20. $x(-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 3)$, parenthèse $\rightarrow 1$: la limite est $-\infty$. 21. Forme $+\infty + \infty : +\infty$.
 22. $\frac{2x^2-1}{x^2+1} \leq \frac{2x^2+\cos x}{x^2+1} \leq \frac{2x^2+1}{x^2+1}$: gendarmes, la limite est 2.
 23. $\frac{-x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+1})}{x(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+3})} \rightarrow \frac{-2}{2} = -1$.
 24. $\frac{2}{x} - 1 < E\left(\frac{2}{x}\right) \leq \frac{2}{x}$, donc pour $x > 0 : 2 - x < xE\left(\frac{2}{x}\right) \leq 2$; la limite est 2.
 25. $\frac{x-2}{x} < \frac{E(x)+\cos x}{x} \leq \frac{x+1}{x}$ ($x > 0$) : la limite est 1.
 26. $h = x - \frac{\pi}{4} : 1 - \tan x = \frac{-2\tan h}{1-\tan h}$ et $\cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} + 2h) = -\sin 2h$. Le quotient vaut $\frac{2\tan h}{(1-\tan h)\sin 2h} = \frac{\tan h}{h} \cdot \frac{2h}{\sin 2h} \cdot \frac{1}{1-\tan h} \rightarrow 1$.
 27. Pour $x > 1 : 0 < \frac{1}{\sqrt{x}} < 1$, donc $E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$; la limite est 0.
 28. $\sqrt{x^2 + x + 1} - ax = x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - a\right)$.
- Cas 1 : $a < 1$: la parenthèse tend vers $1 - a > 0$, la limite est $+\infty$.
 — Cas 2 : $a > 1$: la parenthèse tend vers $1 - a < 0$, la limite est $-\infty$.
 — Cas 3 : $a = 1$: forme indéterminée ; $\sqrt{x^2 + x + 1} - x = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \rightarrow \frac{1}{2}$.

Exercice 2

1. $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.
2. Soit $\varepsilon > 0$; posons $f(x) = x^2 - 3x + 5$. On a $|f(x) - 3| = |x-1||x-2|$. Si $|x-2| < 1$, alors $1 < x < 3$, donc $0 < x-1 < 2$ et $|f(x) - 3| < 2|x-2|$. On pose $\alpha = \min(1; \frac{\varepsilon}{2})$: si $|x-2| < \alpha$, alors $|f(x) - 3| < 2\alpha \leq \varepsilon$. Donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$.

Exercice 3

1. Les diagonales du carré direct donnent $r(A) = B$, $r(B) = C$, $r(C) = D$, $r(D) = A$.
2. a. $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{-3}{1+(-3)}\overrightarrow{AB}$: c'est la relation caractérisant $G = \text{Bar}\{(A; 1); (B; -3)\}$ ($\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$). De même pour J .
2. b. La rotation conserve le barycentre : $r(I) = \text{Bar}\{(r(A); 1); (r(B); -3)\} = \text{Bar}\{(B; 1); (C; -3)\} = J$.
3. a. $r((BD)) = (r(B)r(D)) = (CA)$ et $r((IC)) = (r(I)r(C)) = (JD)$.
3. b. $M = (IC) \cap (BD)$; la rotation conserve l'intersection : $r(M) = (JD) \cap (AC) = N$.
3. c. $r(I) = J$ et $r(M) = N : IM = JN$.
4. $r(C) = D$ et $r(M) = N : (\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{DN}) \equiv \frac{\pi}{2}$, donc $(CM) \perp (DN)$.

Exercice 4

1. $R_A(B) = C$ ($AB = AC$, angle $\frac{\pi}{2}$) et $R_C(C) = C$, donc $f(B) = C$. Les centres sont distincts et $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \neq 0 [2\pi]$: f est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$.
2. a. (AI) est la bissectrice de l'angle droit en A : $(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}$, donc $S_{(AC)} \circ S_{(AI)} = r(A; 2 \times \frac{\pi}{4}) = R_A$.
L'angle $\widehat{ACB}$ mesure $\frac{\pi}{4}$, et (CI) en est la bissectrice : $(\overrightarrow{CI}; \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{8}$, donc $S_{(CI)} \circ S_{(AC)} = r(C; \frac{\pi}{4}) = R_C$.
2. b. $f = S_{(CI)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AI)} = S_{(CI)} \circ S_{(AI)}$ (car $S_{(AC)} \circ S_{(AC)} = \text{Id}$). Les droites (AI) et (CI) se coupent en I : f est la rotation de centre I .
2. c. $f = r(I; \frac{3\pi}{4})$ et $f(A) = A'$, donc $IA' = IA$ et $(\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{IA'}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$.