

Devoir surveillé n° 4 — Durée : 2 heures

Suites numériques — Trigonométrie

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — barème

Le barème est indiqué entre crochets : exercice 1 sur 9 points, exercice 2 sur 5 points, exercice 3 sur 6 points ; total sur 20. Deux questions **bonus** (+0,5 pt chacune) figurent à la fin ; la note totale est plafonnée à 20.

Exercice 1 — Suites numériques — 9 points

★★★★★

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}$.

1. Calculer u_1 et u_2 . [0,5 pt]
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 \leq u_n \leq 4$. [1 pt]
3. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(3 - u_n)}{u_n}$. [1 pt]
b. En déduire la monotonie de la suite (u_n) . [0,5 pt]
4. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{3}(u_n - 3)$. [1 pt]
b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - 3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$. [0,5 pt]
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 1}$.
a. Calculer v_0 , puis montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. [1 pt]
b. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n . [1,5 pt]
c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k - 1}$. Montrer que $S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$, puis calculer T_n en fonction de n . [2 pt]

Exercice 2 — Suites couplées — 5 points

★★★★★

On considère les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par $u_1 = 1$, $v_1 = 11$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $t_n = 2u_n + 3v_n$ et $w_n = v_n - u_n$.

1. Montrer que $(w_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique, puis en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = 10 \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$. [1 pt]
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n > u_n$. [0,5 pt]
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. [1 pt]
4. Montrer que la suite $(t_n)_{n \geq 1}$ est constante, puis en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = 35$. [1 pt]
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 7 - 6 \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ et $v_n = 7 + 4 \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$. [1,5 pt]

Exercice 3 — Trigonométrie — 6 points

★★★★★

1. a. Soient a et b deux réels de $]-\frac{\pi}{2}; 0[$ tels que $\cos a = \frac{12}{13}$ et $\sin b = -\frac{3}{5}$. Montrer que $\sin a = -\frac{5}{13}$ et $\cos b = \frac{4}{5}$. [0,5 pt]
b. Calculer $\cos(a + b)$, $\sin(a - b)$, $\sin 2a$ et $\cos 2b$. [2 pt]
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Transformer en produits les expressions $\sin x + \sin 5x$ et $\cos x - \cos 5x$. [1 pt]
3. Montrer, sans utiliser la calculatrice, que $\cos \frac{\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$. [1 pt]
4. Soit $y \in]0; \pi[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \prod_{k=1}^n \cos \frac{y}{2^k} = \cos \frac{y}{2} \times \cos \frac{y}{4} \times \cdots \times \cos \frac{y}{2^n}$. Vérifier que, pour

tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\cos \frac{y}{2^k} = \frac{\sin \frac{y}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{y}{2^k}}$, puis montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \frac{\sin y}{2^n \sin \frac{y}{2^n}}$. [1,5 pt]

Attention — questions bonus (+0,5 pt chacune)

- **Bonus 1.** On reprend la suite (u_n) de l'exercice 1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $3n \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_k < 3n + \frac{3}{2}$.
- **Bonus 2.** Résoudre dans $[0; \pi]$ l'inéquation $\cos x + \cos 3x > 0$.

Bon courage !