

Devoir surveillé n° 3 — Durée : 2 heures

Barycentre — Analytique du produit scalaire

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — consignes

Calculatrice non autorisée. La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements (usage correct de $\implies$ et $\iff$) seront prises en compte. Les constructions se font à la règle et au compas, sur une figure unique. Le barème est indiqué entre crochets. Deux questions **bonus** (+0,5 pt chacune) figurent à la fin ; la note totale est plafonnée à 20.

Exercice 1 — Barycentre — 8 points

★★★★★

On considère un triangle ABC , le point K défini par $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB}$ et le point $G = \text{bar} \{(A; -1); (B; 2); (C; 1)\}$.

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. [0,5 pt]
b. Construire les points G et K . [1 pt]
2. Construire, sur la même figure, le point $I = \text{bar} \{(B; 2); (C; 1)\}$, en justifiant sa position. [0,5 pt]
3. Montrer que $K = \text{bar} \{(A; -1); (B; 2)\}$. [1 pt]
4. a. Montrer que G est le milieu du segment $[CK]$. [1 pt]
b. Montrer que $G \in (AI)$. [1 pt]
5. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| \leq 6$. [1 pt]
6. Soit L le point du plan tel que $\overrightarrow{KL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{KI}$.
a. Montrer que L est le milieu du segment $[AC]$. [1 pt]
b. Montrer que I est le centre de gravité du triangle ACK . [1 pt]

Exercice 2 — Analytique du produit scalaire — 12 points

★★★★★

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(6; 2)$, $B(2; 4)$, $C(3; 1)$ et $\Omega(2; -1)$.

1. Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{C\Omega}$, les distances CA et $C\Omega$, et $\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C\Omega})$. [1,5 pt]
2. Calculer $\cos(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C\Omega}})$ et $\sin(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C\Omega}})$, puis en déduire la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C\Omega}})$. [1,5 pt]
3. Calculer l'aire du triangle $AC\Omega$. [0,5 pt]
4. a. Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) de centre Ω et de rayon $R = 5$. [0,5 pt]
b. Déterminer une représentation paramétrique du cercle (C) . [0,5 pt]
5. Soit (Δ) la droite d'équation $x + 2y - 10 = 0$.
a. Calculer la distance $d(\Omega; (\Delta))$ du point Ω à la droite (Δ) . [0,5 pt]
b. En déduire que (Δ) coupe le cercle (C) en deux points, que l'on déterminera. [1,5 pt]
6. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par Ω et perpendiculaire à (Δ) . [0,75 pt]
7. Pour tout réel m , on note (C_m) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $x^2 + y^2 + (m - 4)x + (2m + 2)y - 10m - 20 = 0$.
a. Écrire le trinôme $m^2 + 8m + 20$ sous forme canonique et en déduire son signe. [0,5 pt]
b. Montrer que (C_m) est un cercle dont on précisera le centre Ω_m et le rayon R_m . [1 pt]
c. Identifier le cercle (C_0) , puis déterminer la valeur de m pour laquelle le rayon R_m est minimal, ainsi que le centre et le rayon du cercle correspondant. [1 pt]
d. Déterminer l'ensemble des centres Ω_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$. [0,75 pt]
e. Montrer que tous les cercles (C_m) passent par les points A et B . [0,75 pt]
f. Résoudre graphiquement le système $\begin{cases} x + 2y - 10 > 0 \\ (x - 4)^2 + (y - 3)^2 < 5 \end{cases}$. [0,75 pt]

Attention — questions bonus (+0,5 pt chacune)

- **Bonus 1.** On reprend les points A, B, C et G de l'exercice 1. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) = 0$.
- **Bonus 2.** À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, déterminer la plus grande valeur de $x + 2y$ lorsque le point $M(x; y)$ décrit le cercle (C) de l'exercice 2, et le point de (C) où elle est atteinte.

Bon courage !