

Devoir surveillé n° 2 — Durée : 2 heures

Les applications — Fonctions numériques

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — consignes

Calculatrice non autorisée. La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements (usage correct de $\implies$ et $\iff$, ensembles de départ et d'arrivée respectés) seront prises en compte. Les variations s'étudient sans dérivées ni limites. Le barème est indiqué entre crochets. Deux questions **bonus** (+0,5 chacune) figurent à la fin ; la note totale est plafonnée à 20.

Exercice 1 — Les applications — 9 points

★★★★★

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$.

1. a. Vérifier que $f(x) = 2 - \frac{5}{x+1}$, puis montrer que l'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solution. [0,5 pt]
b. L'application f est-elle surjective ? Justifier. [0,5 pt]
2. Montrer que f est injective. [1 pt]
3. Soit $g :]-1; +\infty[\rightarrow]-\infty; 2[$ l'application définie par $g(x) = f(x)$.
a. Montrer que $g(]-1; +\infty[) =]-\infty; 2[$. [1 pt]
b. En déduire que g est bijective et déterminer $g^{-1}(y)$ pour $y \in]-\infty; 2[$. [2 pt]
4. Déterminer $g([4; +\infty[)$ et $g^{-1}([-3; 0])$. [2 pt]
5. Soient E' et F' deux ensembles et $h : E' \rightarrow F'$ une application, et soient A, B deux parties de E' . Montrer que : si $A \subset B$, alors $h(A) \subset h(B)$; puis que $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$. [1 pt]
6. Soient $u : E \rightarrow F$ et $v : F \rightarrow G$ deux applications surjectives. Montrer que $v \circ u$ est surjective. [1 pt]

Exercice 2 — Fonctions numériques — 11 points

★★★★★

On considère les fonctions numériques f et g définies par $f(x) = \sqrt{x+6}$ et $g(x) = x^2 - 2x + 3$.

1. a. Déterminer D_f et D_g . [0,5 pt]
b. Dresser les tableaux de variations de f et de g . [1 pt]
2. Montrer, par deux méthodes, que 2 est le minimum de g sur $\mathbb{R}$. [1 pt]
3. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de (C_g) , puis les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère. [0,5 pt]
4. Tracer (C_f) et (C_g) dans un même repère orthonormé. [2 pt]
5. a. Déterminer $f([-6; 3])$ et $f([-2; +\infty[)$. [0,5 pt]
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $g(x) < 3$. [0,5 pt]
c. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $g(x) = f(x)$. [0,5 pt]
d. Discuter graphiquement, suivant le réel m , le nombre de solutions de l'équation $g(x) = m$. [0,5 pt]
6. Soit $\varphi(x) = x^2 - 2|x| + 3$.
a. Montrer que φ est paire et que $\varphi(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. [1 pt]
b. Tracer (C_φ) dans le repère précédent. [1 pt]
7. a. Soit $h(x) = x + 9 - 2\sqrt{x+6}$. Déterminer D_h et montrer que $h = g \circ f$. [0,5 pt]
b. Étudier les variations de h sur $[-6; -5]$ et sur $[-5; +\infty[$. [1 pt]
8. Soit $k(x) = E(2x) - 2E(x)$. Montrer que k est périodique de période 1. [0,5 pt]

Attention — questions bonus (+0,5 pt chacune)

- **Bonus 1.** Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad k(x) \in \{0; 1\}$.
- **Bonus 2.** Soit m un réel. Déterminer, par le calcul, l'ensemble des réels m pour lesquels l'équation $\sqrt{x+6} = x + m$ admet exactement deux solutions réelles distinctes. (Indication : poser $t = \sqrt{x+6}$.)

Bon courage !