

Devoir surveillé n° 1 — Durée : 2 heures

Notions de logique — Les ensembles

Exercice 1 — Logique — 10 points

On considère les propositions $P : (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad 3xy \leq \frac{x^2 + 9y^2}{2}$ et $Q : (\exists x \in \mathbb{R}) \quad x^2 - 5x - 14 = 0$.

- 1) a) Écrire la négation de P , puis montrer que Q est vraie. [1 pt]
 b) Montrer que P est vraie en raisonnant par équivalences. [1 pt]
 c) En déduire que : $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+) : (x^2 + 9y^2)(y^2 + 9z^2)(z^2 + 9x^2) \geq 216 (xyz)^2$. [0,5 pt]
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$.
 a) Montrer que $n(n+5)$ est un nombre pair. [1 pt]
 b) Montrer par contraposée que : si 8 ne divise pas $n^2 + 7$, alors n est pair. [1,5 pt]
- 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{3x-2} = \frac{2-x}{\sqrt{x}}$. [1,5 pt]
- 4) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{k=0}^n (6k+2) = (n+1)(3n+2)$. [1,5 pt]
- 5) Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Écrire à l'aide des quantificateurs la proposition $R : \ll A \not\subset \overline{B} \gg$. [0,5 pt]
- 6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 a) Montrer que $\sqrt{n^2+n} \notin \mathbb{N}$. [0,5 pt]
 b) En déduire que $\sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$ (on admet que si $\text{PGCD}(a;b) = 1$, avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, alors $\text{PGCD}(a^2;b^2) = 1$). [1 pt]

Exercice 2 — Ensembles — 4 points

- 1) Soient A et B deux parties d'un ensemble E .
 a) Montrer que $B = (A \cup B) \setminus (A \setminus B)$ et que $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$. [1 pt]
 b) On suppose que $A \cup B = \{0; 1; 2; \dots; 12\}$, $A \cap B = \{3; 6; 9; 12\}$ et $A \setminus B = \{1; 2; 4; 5\}$. Déterminer en extension B , $B \setminus A$ et $A \Delta B$. [1,5 pt]
- 2) On pose $C = \left\{ \frac{17\pi}{12} + \frac{k\pi}{4} / k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $D = \left\{ -\frac{\pi}{12} - \frac{k\pi}{4} / k \in \mathbb{Z} \right\}$. Montrer que $C = D$. [1,5 pt]

Exercice 3 — Ensembles — 6 points

- 1) Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E .
 a) Montrer que : $\overline{A} \subset B \iff A \cup B = E$. [0,5 pt]
 b) Montrer que $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$. [1 pt]
 c) Montrer que : $\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \implies B \subset C$. [1,5 pt]
- 2) On pose $A = \{2k+4 / k \in \mathbb{Z}\}$ et $B = \{2k-1 / k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $\mathbb{Z} \subset A \cup B$, puis en déduire que $A \cup B = \mathbb{Z}$. [1 pt]
- 3) On considère $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + y = 3\}$ et $B = \{(1-t; 1+2t) / t \in \mathbb{R}\}$.
 a) Montrer par double inclusion que $A = B$. [1 pt]
 b) On pose $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 4x + 2y = 5\}$. Montrer par l'absurde que $A \cap D = \emptyset$, puis en déduire, en utilisant 3)a), que $B \subset \overline{D}$ (complémentaire de D dans $\mathbb{R}^2$). [1 pt]

Bonus.

- 4) Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E . Montrer que : $A \Delta B = A \Delta C \implies B = C$. [+0,5 pt]
- 5) Montrer par l'absurde que $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$, puis en déduire que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. [+0,5 pt]