

Devoir maison n° 4

Suites numériques — Trigonométrie

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Cadre. Le symbole $\iff$ n'est employé que si chaque étape est réversible. Dans l'exercice 3, x, y, z désignent des réels et k un entier relatif; une égalité contenant $\tan$ n'est à établir que lorsque toutes les expressions sont définies.

Exercice 1 — Suites numériques — suite homographique

★★★★★

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 4$.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1}$.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique; préciser sa raison et son premier terme.
 - b. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
4. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{2}|u_n - 4|$.
 b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 4| \leq 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{5}{u_k + 1}$. Exprimer S_n et T_n en fonction de n .

Exercice 2 — Suites numériques — récurrence linéaire d'ordre 2

★★★★★

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$. On admet que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1. Calculer u_3 , u_4 et v_1 .
2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = 5 - \frac{4}{v_n}$.
3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 < v_n < 4$.
4. Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
5. On considère la suite $(t_n)_{n \geq 1}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $t_n = \frac{v_n - 4}{v_n - 1}$.
 - a. Montrer que $(t_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
 - b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{4^n + 2}{4^{n-1} + 2}$.
6. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{4^{n-1} + 2}{3}$.

Exercice 3 — Trigonométrie

★★★★★

1. a. En remarquant que $\frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\pi}{12}$, calculer $\cos^2 \frac{\pi}{12}$, puis en déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et vérifier que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.
 b. Calculer $\sin \frac{\pi}{12}$ par deux méthodes.
 c. Calculer $\tan \frac{\pi}{12}$ par deux méthodes, puis calculer $\tan \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right)$ par deux méthodes.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En remarquant que $3x = 2x + x$, montrer que :

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x ;$$

$$\sin 3x = -4 \sin^3 x + 3 \sin x ;$$

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x} .$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq \pi + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$; on pose $t = \tan \frac{x}{2}$. Montrer que :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} ; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} ; \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2} ; \quad \frac{1-\cos x}{\sin x} = t.$$

4. Soient x, y et z trois réels tels que $x + y + z = \pi$. Montrer que :

- a. $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 4 \sin x \sin y \sin z$;
- b. $\cos x + \cos y + \cos z = 1 + 4 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2}$;
- c. $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 2 + 2 \cos x \cos y \cos z$.

5. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $] -\pi; \pi]$, les équations suivantes : $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$; $\sqrt{2} \sin x + 1 = 0$; $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{2}$.
- b. Placer les solutions des équations précédentes (dans $] -\pi; \pi]$) sur le cercle trigonométrique.
- c. Résoudre dans $] -\pi; \pi]$ les inéquations $2 \cos x - \sqrt{3} \geq 0$ et $\sqrt{2} \sin x + 1 < 0$.