

Devoir maison n° 3

Barycentre — Analytique du produit scalaire

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — consignes

- Devoir à rendre sur copie double, rédigé avec soin. Toute réponse doit être **justifiée**.
- Le symbole $\Longleftrightarrow$ ne doit être employé que si chaque étape est réversible ; sinon, utiliser $\implies$ et vérifier la réciproque.
- Dans les exercices 2 et 3, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$; x, y, θ désignent des réels et m un paramètre réel.

Exercice 1 — Barycentre — parallélogramme et centre

★★★★★

On considère un triangle ABC et le point K du plan défini par $5\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB}$.

- Montrer que $B = \text{bar} \{(C; 1); (K; 5)\}$.
- On pose $J = \text{bar} \{(A; 4); (C; 1); (K; 5)\}$.
 - Montrer que $J = \text{bar} \{(A; 4); (B; 6)\}$.
 - En déduire que $J = \text{bar} \{(A; 2); (B; 3)\}$. $[\alpha]$
- On pose $I = \text{bar} \{(A; 4); (C; 1)\}$.
 - Montrer que $\overrightarrow{CI} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CA}$.
 - Montrer que J est le milieu du segment $[KI]$.
- Soit N le milieu du segment $[CK]$.
 - Justifier que $5\overrightarrow{NC} + 5\overrightarrow{NK} = \vec{0}$.
 - En appliquant la propriété caractéristique du barycentre B (question 1), montrer que $5\overrightarrow{NK} = 6\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC}$.
 - En déduire que $N = \text{bar} \{(B; 3); (C; 2)\}$ et que $3\overrightarrow{NB} = 2\overrightarrow{CN}$. $[\beta]$
- Soit L le milieu du segment $[CI]$.
 - Justifier que $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$.
 - En déduire que $\overrightarrow{IL} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.
- En appliquant la propriété caractéristique du barycentre à la relation $[\alpha]$, montrer que $3\overrightarrow{NB} = 5\overrightarrow{NJ} - 2\overrightarrow{NA}$. $[\delta]$
 - En déduire, à l'aide de $[\beta]$ et $[\delta]$, que $\overrightarrow{JN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.
 - En déduire que le quadrilatère $ILNJ$ est un parallélogramme.
- Soit O le centre du parallélogramme $ILNJ$.
 - Justifier que $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$.
 - En appliquant la propriété caractéristique du barycentre aux points I, L, N et J , montrer que : $4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 5\overrightarrow{OI}$; $5\overrightarrow{OC} + 5\overrightarrow{OI} = 10\overrightarrow{OL}$; $3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 5\overrightarrow{ON}$; $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = 5\overrightarrow{OJ}$.
 - En déduire que $O = \text{bar} \{(A; 4); (B; 3); (C; 3)\}$.

Exercice 2 — Analytique du produit scalaire — triangle, droites, cercles

★★★★★

On considère les points $A(0; -1)$, $B(1 + \sqrt{3}; -\sqrt{3})$, $C(2; 1)$ et $D(2; -3)$.

- Montrer que $AC = AB = 2\sqrt{2}$, $\det(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) = -4\sqrt{3}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$.
- Calculer $\cos(\widehat{\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}})$ et $\sin(\widehat{\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}})$.
- En déduire la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}})$.
- Déterminer la nature du triangle ABC .
- Calculer l'aire du triangle ABC .

6. Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par C et perpendiculaire à (DA) .
7. Montrer que la droite (D') d'équation $y = -x + 4$ est perpendiculaire à la droite (Δ) .
8. Montrer que $2\sqrt{2}$ est la distance du point $E(5;0)$ à la droite (Δ) .
9. Déterminer une équation cartésienne du cercle (C_1) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1 + 2 \cos \theta \\ y = 3 + 2 \sin \theta \end{cases}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
10. Déterminer, par deux méthodes, une équation cartésienne du cercle (C_2) de diamètre $[AC]$.
11. Déterminer une représentation paramétrique du cercle (C_2) .
12. Déterminer l'ensemble (C_3) des points $M(x;y)$ du plan tels que $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.
13. Résoudre graphiquement le système $\begin{cases} x - 2y + 5 \geq 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 \leq 0 \end{cases}$.
14. Déterminer, par deux méthodes, une équation cartésienne du cercle (C_4) circonscrit au triangle ACD .

Exercice 3 — Famille de cercles, tangentes, inégalités

★★★★★

1. Étudier l'intersection de la droite $(\Delta) : x + y - 1 = 0$ et du cercle $(C) : x^2 + y^2 - 5 = 0$.
2. Pour $m \in \mathbb{R}$, soit (C_m) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $x^2 + y^2 + 2mx + 2my - 2m - 5 = 0$. Montrer que (C_m) est un cercle et préciser son centre Ω_m et son rayon R_m .
3. Déterminer l'ensemble (D) des centres Ω_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$.
4. Montrer que tous les cercles (C_m) passent par deux points fixes I et J .
5. Montrer que $(D) \perp (IJ)$.
6. Soit $A(x_0; y_0)$ un point du plan. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(x_0; y_0)$ pour que A appartienne à au moins un cercle (C_m) .
7. Vérifier que le point $B(2;3)$ est extérieur au cercle (C_1) (obtenu pour $m = 1$), puis déterminer les équations cartésiennes des tangentes à (C_1) passant par B .
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - a. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour tous réels non nuls a_1 et a_2 : $(a_1^2 + a_2^2) \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{4}{a_2^2} \right) \geq 9$.
 - b. À l'aide de l'inégalité triangulaire, montrer que pour tous réels $a_1, a_2, \dots, a_n$: $\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + 1} \geq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 + n^2}$.