

Devoir maison n° 2

Les applications — Fonctions numériques

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — consignes

- Devoir à rendre sur copie double, rédigé avec soin. Toute réponse doit être **justifiée** ; les ensembles de départ et d'arrivée des applications doivent être respectés.
- Le symbole $\Longleftrightarrow$ ne doit être employé que si chaque étape est réversible ; sinon, utiliser $\implies$ et vérifier la réciproque.
- Les variations s'étudient à l'aide de la définition, du taux de variation ou de la composition (ni dérivées, ni limites). E désigne la fonction partie entière.
- L'exercice 5 est un **problème de synthèse** sur les fonctions numériques.

Exercice 1 — Injection, surjection, bijection

★★★★★

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 4}$.

1. a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}) \quad f(x) < 1$.
b. L'application f est-elle surjective ? Justifier.
2. a. Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}) \quad 4 - x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $f(4 - x) = f(x)$.
b. L'application f est-elle injective ? Justifier.
3. Soit $g :]2; +\infty[\rightarrow]-\infty; 1[$ l'application définie par $g(x) = f(x)$.
a. Montrer que g est bijective.
b. Calculer $g^{-1}(0)$.
c. Déterminer $g^{-1}(y)$ pour tout $y \in]-\infty; 1[$.

Exercice 2 — Bijection et composition

★★★★★

On considère les applications $f : [-2; 0] \rightarrow [0; \frac{4}{5}]$, $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$; $g : [-2; 0] \rightarrow [0; 4]$, $g(x) = x^2$;
 $h : [0; 4] \rightarrow [0; \frac{4}{5}]$, $h(t) = \frac{t}{t + 1}$.

1. Montrer que g est bijective et déterminer g^{-1} .
2. Montrer que h est bijective et déterminer h^{-1} .
3. Vérifier que $f = h \circ g$.
4. En déduire que f est bijective et déterminer $f^{-1}(y)$ pour $y \in [0; \frac{4}{5}]$.

Exercice 3 — Application entre ensembles de parties

★★★★★

Soient E un ensemble, A et B deux parties de E . On considère l'application

$$\varphi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), \quad X \mapsto (A \setminus X ; B \setminus X).$$

1. Déterminer $\varphi(\emptyset)$, $\varphi(A \cap B)$ et $\varphi(E)$.
2. On suppose que $E = A \cup B$. Montrer que φ est injective.
3. On suppose que $E = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$. Montrer que φ est surjective.
4. En déduire, dans le cas de la question 3, que φ est bijective, et déterminer $\varphi^{-1}(Y; Z)$ pour $(Y; Z) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

Exercice 4 — Bijection et partie entière

★★★★★

Soit $f : \mathbb{Z} \times [0; 2[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(n; x) = 2n + x$.

1. Montrer que f est bijective.

2. Déterminer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ (on pourra utiliser $E\left(\frac{y}{2}\right)$).

Exercice 5 — Problème — fonctions numériques

★★★★★

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = -x^2 - 4x - 2$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$, et A le point de coordonnées $(-1; 1)$.

1. Déterminer D_f et montrer que f n'est ni paire ni impaire.
2. a. Écrire $f(x)$ sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$ et dresser le tableau de variations de f .
b. Déterminer D_g et dresser le tableau de variations de g .
3. Montrer que le taux de variation de f entre deux réels distincts x et y est $-x - y - 4$.
4. Retrouver, à l'aide de la question 3, les variations de f sur $]-\infty; -2]$ et sur $[-2; +\infty[$.
5. a. Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère.
b. Vérifier que $A \in (C_f) \cap (C_g)$.
6. Tracer (C_f) et (C_g) dans un même repère orthonormé.
7. a. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -7$.
b. Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = -7$.
8. Résoudre dans $[-2; +\infty[$ l'équation $x^2 + 4x + 2 + \sqrt{x+2} = 0$.
9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > -7$.
10. Résoudre dans $[-2; +\infty[$ l'inéquation $x^2 + 4x + 2 + \sqrt{x+2} < 0$.
11. Déterminer $f([-3; -2])$ et $f([-2; 0])$ par deux méthodes (graphique et algébrique).
12. Soit $h(x) = \sqrt{-x^2 - 4x}$. Déterminer D_h , vérifier que $h = g \circ f$ sur D_h , puis étudier les variations de h sur $[-4; -2]$ et sur $[-2; 0]$.
13. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E\left(\frac{x-1}{3}\right) = \frac{x+2}{4}$.