

Devoir maison n° 1

Notions de logique — Les ensembles

Exercice 1 — Quantificateurs, négation et loi logique

- 1) a) Écrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :
- P_1 : « La somme de deux entiers impairs est paire. »
 - P_2 : « Pour tout réel x , il existe un entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$. »
 - P_3 : « Il n'existe aucun nombre rationnel solution de l'équation $x^2 = 5$. »
- b) Déterminer la valeur de vérité et la négation des propositions P_1 et P_3 (pour P_3 , on admettra que $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$).
- 2) Soient P et Q deux propositions. Montrer que la proposition $[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (P \Rightarrow \overline{Q})] \Rightarrow \overline{P}$ est une loi logique. Quel type de raisonnement justifie-t-elle ?

Exercice 2 — Raisonnements direct, par contraposée, par équivalences, par l'absurde

- 1) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+$.
- a) On suppose $2\sqrt{a} \neq \sqrt{b}$. Montrer que : $\sqrt{a} \neq 4\sqrt{b} \Rightarrow \frac{\sqrt{a} + 3\sqrt{b}}{2\sqrt{a} - \sqrt{b}} \neq 1$.
- b) Montrer que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
- c) En déduire que : $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq a + b + c$.
- 2) Soient $x, y \in \mathbb{Q}^*$ tels que $x^3y + xy^3 = 6$. Montrer que $x \neq y$.
- 3) Soient $a, b, x, y \in \mathbb{R}^*$. Montrer que : $ax + by = 2 \Rightarrow \frac{4}{x^2 + y^2} \leq a^2 + b^2$.
- 4) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que : $(|x| < 1 \text{ et } |y| < 1) \Rightarrow \left| \frac{x-y}{1-xy} \right| < 1$.
- 5) a) Montrer par l'absurde que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sqrt{n^2 + 1} \notin \mathbb{N}$.
- b) En déduire, par l'absurde, que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sqrt{n^2 + 1} \notin \mathbb{Q}$. (On pourra écrire $\sqrt{n^2 + 1} = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\text{PGCD}(p; q) = 1$.)

Exercice 3 — Récurrence et disjonction des cas

- 1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^n k 2^k = (n-1) 2^{n+1} + 2$.
- b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 6 \text{ divise } n^3 + 5n$.
- 2) Montrer par disjonction des cas que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ |x-1| + |x-2| + |x-3| \geq 2$, puis déterminer les réels x pour lesquels l'égalité est atteinte.
- 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{x^2 + x - 6} \geq 2x - 3$.

Exercice 4 — *Écriture et égalité d'ensembles*

1) Écrire en extension les ensembles suivants :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{N} / \frac{3x+8}{x+1} \in \mathbb{N} \right\};$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{N} / \frac{x^2+x+3}{x+2} \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$C = \{(x; y) \in \mathbb{Z}^2 / (x+y)(2x-y) = 5\}.$$

2) Soient A , B et C des parties d'un ensemble E ; $\overline{X}$ désigne le complémentaire de X dans E . Montrer que :

a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

c) $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \setminus B = A \setminus C \end{cases} \iff B = C$

d) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$

e) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

f) $\overline{A \Delta B} = \overline{A} \Delta B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

g) $\begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ \overline{A} \cap B = \overline{A} \cap C \end{cases} \implies B = C$

3) On considère les ensembles $A =]1; +\infty[$ et $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} / \frac{2x-1}{x-1} > 2 \right\}$. Montrer que $A = B$.

4) On considère les ensembles $A = \left\{ (x; \sqrt{2x-4}) / x \in [2; +\infty[\right\}$ et $B = \left\{ \left(\frac{t^2+4}{2}; t \right) / t \in \mathbb{R}_+ \right\}$. Montrer que $A = B$.

Exercice 5 — *Raisonnement par l'absurde et problème de synthèse*

1) On considère les ensembles $A = \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{7} / k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $B = \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{7} / k \in \mathbb{Z} \right\}$. Montrer par l'absurde que $A \cap B = \emptyset$.

2) Soient A et B deux parties d'un ensemble E telles que : $A \cap B = \{3; 5\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 7\}$, $2 \in B \setminus A$, $7 \notin A \setminus B$ et $1 \notin B$.

a) Montrer que, pour toutes parties X, Y de E : $X \cup Y = (X \Delta Y) \cup (X \cap Y)$, et que cette réunion est disjointe. En déduire $A \Delta B$.

b) Montrer par l'absurde que $7 \in B$, puis que $\{2; 7\} \subset B \setminus A$.

c) Montrer que $A \setminus B = \{1\}$, puis que $B \setminus A = \{2; 7\}$.

d) Écrire A et B en extension, puis déterminer le nombre de parties X de $A \cup B$ telles que $X \cap A = A \cap B$.