

Corrigé du devoir surveillé n° 4 (barème)

Suites numériques — Trigonométrie

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — barème

Exercice 1 : 9 pts ; Exercice 2 : 5 pts ; Exercice 3 : 6 pts ; total 20 pts, plus 2 bonus de 0,5 pt (note plafonnée à 20). Les points de chaque question sont indiqués entre crochets, avec leur répartition. Tous les résultats ont été contrôlés avec Python/sympy (`build/verif_lot4.py`).

Exercice 1 (9 points)

1. [0,5 pt] $u_1 = 4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$ [0,25] ; $u_2 = 4 - \frac{12}{13} = \frac{40}{13}$ [0,25].
2. [1 pt] *Initialisation* : $3 \leq u_0 = 4 \leq 4$ [0,25]. *Hérédité* : si $3 \leq u_n \leq 4$, alors $u_n > 0$ et $\frac{3}{4} \leq \frac{3}{u_n} \leq 1$, d'où $3 \leq 4 - \frac{3}{u_n} \leq \frac{13}{4} \leq 4$ [0,5]. *Conclusion* : $(\forall n \in \mathbb{N}) 3 \leq u_n \leq 4$ [0,25].
- 3.a. [1 pt] $u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 3 - u_n^2}{u_n}$ [0,5] = $\frac{-(u_n^2 - 4u_n + 3)}{u_n} = \frac{(u_n - 1)(3 - u_n)}{u_n}$ [0,5].
- 3.b. [0,5 pt] $u_n - 1 > 0$, $3 - u_n \leq 0$, $u_n > 0$: $u_{n+1} - u_n \leq 0$, la suite est décroissante.
- 4.a. [1 pt] $u_{n+1} - 3 = 1 - \frac{3}{u_n} = \frac{u_n - 3}{u_n} \geq 0$ [0,5]. Comme $u_n \geq 3$, $\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{3}$ et $u_n - 3 \geq 0$, donc $\frac{u_n - 3}{u_n} \leq \frac{1}{3}(u_n - 3)$ [0,5].
- 4.b. [0,5 pt] Récurrence : $0 \leq u_0 - 3 = 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$; si $0 \leq u_n - 3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$, alors $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.
- 5.a. [1 pt] $v_0 = \frac{4-3}{4-1} = \frac{1}{3}$ [0,25]. $u_{n+1} - 1 = \frac{3(u_n - 1)}{u_n}$ et $u_{n+1} - 3 = \frac{u_n - 3}{u_n}$, donc $v_{n+1} = \frac{u_n - 3}{3(u_n - 1)} = \frac{1}{3}v_n$ [0,75].
- 5.b. [1,5 pt] $v_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ [0,5]. De $v_n(u_n - 1) = u_n - 3$: $u_n(1 - v_n) = 3 - v_n$, avec $v_n \neq 1$ [0,5], donc $u_n = \frac{3 - v_n}{1 - v_n} = \frac{3^{n+2} - 1}{3^{n+1} - 1}$ [0,5]. (Contrôle : $u_1 = \frac{26}{8} = \frac{13}{4}$.)
- 5.c. [2 pt] $S_n = \frac{1}{3} \times \frac{1 - (1/3)^n}{1 - 1/3} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$ [0,75]. Puis $v_k = \frac{(u_k - 1) - 2}{u_k - 1} = 1 - \frac{2}{u_k - 1}$, donc $\frac{1}{u_k - 1} = \frac{1 - v_k}{2}$ [0,75], et

$$T_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (1 - v_k) = \frac{n - S_n}{2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \text{ [0,5].}$$

Exercice 2 (5 points)

1. [1 pt] $w_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{2u_n + 4v_n - 3u_n - 3v_n}{6} = \frac{1}{6}(v_n - u_n) = \frac{1}{6}w_n$ [0,5] ; $w_1 = 10$, donc $w_n = 10 \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ [0,5].
2. [0,5 pt] $v_n - u_n = w_n > 0$.
3. [1 pt] $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{w_n}{2} > 0$ [0,5] ; $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{3} = -\frac{w_n}{3} < 0$ [0,5].
4. [1 pt] $t_{n+1} = (u_n + v_n) + (u_n + 2v_n) = 2u_n + 3v_n = t_n$ [0,5] ; donc $t_n = t_1 = 2 + 33 = 35$ [0,5].
5. [1,5 pt] De $2u_n + 3v_n = 35$ et $v_n = u_n + w_n$: $5u_n + 3w_n = 35$ [0,5], d'où $u_n = 7 - \frac{3}{5}w_n = 7 - 6 \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ [0,5] et $v_n = u_n + w_n = 7 + 4 \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ [0,5].

Exercice 3 (6 points)

- 1.a. [0,5 pt]** Sur $] -\frac{\pi}{2}; 0[$, $\sin < 0$ et $\cos > 0$: $\sin a = -\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = -\frac{5}{13}$ [0,25] et $\cos b = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$ [0,25].
- 1.b. [2 pt]** (0,5 par résultat) $\cos(a+b) = \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} - \left(-\frac{5}{13}\right) \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{48-15}{65} = \frac{33}{65}$; $\sin(a-b) = \left(-\frac{5}{13}\right) \frac{4}{5} - \frac{12}{13} \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{-20+36}{65} = \frac{16}{65}$; $\sin 2a = 2 \left(-\frac{5}{13}\right) \frac{12}{13} = -\frac{120}{169}$; $\cos 2b = 1 - 2 \cdot \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$.
- 2. [1 pt]** $\sin x + \sin 5x = 2 \sin 3x \cos 2x$ [0,5] ; $\cos x - \cos 5x = -2 \sin 3x \sin(-2x) = 2 \sin 3x \sin 2x$ [0,5].
- 3. [1 pt]** $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} (\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{3})$ [0,5] $= \frac{1}{2} (0 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ [0,5].
- 4. [1,5 pt]** Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{y}{2^k} \in]0; \frac{\pi}{2}[$, donc $\sin \frac{y}{2^k} > 0$; et $\sin \frac{y}{2^{k-1}} = \sin \left(2 \cdot \frac{y}{2^k}\right) = 2 \sin \frac{y}{2^k} \cos \frac{y}{2^k}$, d'où l'égalité [0,5]. Le produit est alors télescopique :

$$P_n = \prod_{k=1}^n \frac{\sin \frac{y}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{y}{2^k}} = \frac{1}{2^n} \times \frac{\sin y}{\sin \frac{y}{2}} \times \frac{\sin \frac{y}{2}}{\sin \frac{y}{4}} \times \dots \times \frac{\sin \frac{y}{2^{n-1}}}{\sin \frac{y}{2^n}} = \frac{\sin y}{2^n \sin \frac{y}{2^n}} \quad [1].$$

(On peut aussi raisonner par récurrence : $P_{n+1} = P_n \cos \frac{y}{2^{n+1}}$.)

Bonus

Bonus 1. [+0,5] D'après 4.b : pour tout k , $0 \leq u_k - 3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^k$. En sommant pour k de 0 à $n-1$: $0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_k - 3n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) < \frac{3}{2}$. D'où $3n \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_k < 3n + \frac{3}{2}$.

Bonus 2. [+0,5] $\cos x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cos x$. Sur $[0; \pi]$: $\cos x > 0 \iff x \in [0; \frac{\pi}{2}[$ et $\cos 2x > 0 \iff x \in [0; \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{4}; \pi]$. Le produit est strictement positif lorsque les deux facteurs sont de même signe, non nuls : $S = [0; \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}[$.