

Corrigé du devoir surveillé n° 3 (barème)

Barycentre — Analytique du produit scalaire

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — barème

Exercice 1 : 8 pts ; Exercice 2 : 12 pts ; total 20 pts, plus 2 bonus de 0,5 pt (note plafonnée à 20). Les points de chaque question sont indiqués entre crochets, avec leur répartition. Tous les résultats ont été contrôlés avec Python/sympy.

Exercice 1 (8 points)

1.a. [0,5 pt] La somme des poids vaut $-1 + 2 + 1 = 2 \neq 0$ [0,25]. Propriété caractéristique au point A : $2\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AG}$, d'où $\vec{AG} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ [0,25].

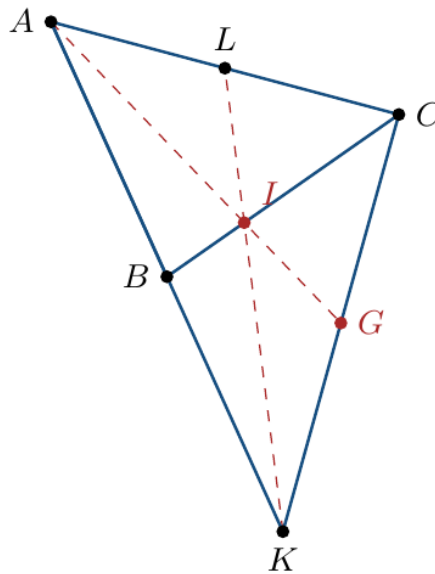
1.b. [1 pt] K : on reporte $\vec{AK} = 2\vec{AB}$ [0,5]. G : on construit $\vec{AG} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ (parallélogramme construit sur $\vec{AB}$ et $\frac{1}{2}\vec{AC}$) [0,5].

2. [0,5 pt] $I = \text{bar} \{(B; 2); (C; 1)\} : \vec{BI} = \frac{1}{3}\vec{BC}$; I est sur $[BC]$, au tiers à partir de B .

3. [1 pt] $\vec{AK} = 2\vec{AB} \iff \vec{AK} = \frac{2}{-1+2}\vec{AB}$ [0,5], qui caractérise le barycentre de $(A; -1)$ et $(B; 2)$ (poids $1 \neq 0$) : $K = \text{bar} \{(A; -1); (B; 2)\}$ [0,5].

4.a. [1 pt] K est le barycentre partiel de $(A; -1)$ et $(B; 2)$, de poids 1 [0,5] ; associativité : $G = \text{bar} \{(K; 1); (C; 1)\}$, donc G est le milieu de $[CK]$ [0,5].

4.b. [1 pt] I est le barycentre partiel de $(B; 2)$ et $(C; 1)$, de poids 3 [0,5] ; associativité : $G = \text{bar} \{(A; -1); (I; 3)\}$, donc $G \in (AI)$ [0,5].



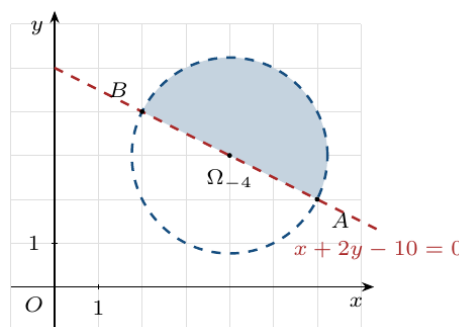
5. [1 pt] Pour tout M : $-\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} = 2\vec{MG}$ [0,5]. Donc $\|\dots\| \leq 6 \iff 2MG \leq 6 \iff MG \leq 3$: l'ensemble cherché est le **disque fermé de centre G et de rayon 3** [0,5].

6.a. [1 pt] Prenons A pour origine : $\vec{AI} = \frac{1}{3}(2\vec{AB} + \vec{AC})$ et $\vec{AK} = 2\vec{AB}$, donc $\vec{KI} = \vec{AI} - \vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{4}{3}\vec{AB}$ [0,5]. Alors $\vec{AL} = \vec{AK} + \frac{3}{2}\vec{KI} = 2\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} - 2\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AC}$: L est le milieu de $[AC]$ [0,5].

6.b. [1 pt] $\vec{KL} = \frac{3}{2}\vec{KI}$ donne $\vec{KI} = \frac{2}{3}\vec{KL}$, où $[KL]$ est la médiane issue de K du triangle ACK (6.a) [0,5]. Le point de la médiane situé aux deux tiers à partir du sommet est le centre de gravité : I est le centre de gravité de ACK [0,5]. (Autre rédaction : $\frac{1}{3}(\vec{AA} + \vec{AC} + \vec{AK}) = \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AB} = \vec{AI}$.)

Exercice 2 (12 points)

1. [1,5 pt] $\vec{CA}(3;1)$, $\vec{C\Omega}(-1;-2)$ [0,25]. $\vec{CA} \cdot \vec{C\Omega} = -3 - 2 = -5$ [0,5]; $CA = \sqrt{10}$, $C\Omega = \sqrt{5}$ [0,25]; $\det(\vec{CA}; \vec{C\Omega}) = 3 \times (-2) - 1 \times (-1) = -5$ [0,5].
2. [1,5 pt] $\cos = \frac{-5}{\sqrt{50}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ [0,5]; $\sin = \frac{-5}{\sqrt{50}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ [0,5]; mesure principale $-\frac{3\pi}{4}$ [0,5].
3. [0,5 pt] $S = \frac{1}{2} |\det(\vec{CA}; \vec{C\Omega})| = \frac{5}{2}$.
- 4.a. [0,5 pt] $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25 \iff x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$.
- 4.b. [0,5 pt] $\begin{cases} x = 2 + 5 \cos \theta \\ y = -1 + 5 \sin \theta \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}$.
- 5.a. [0,5 pt] $d(\Omega; (\Delta)) = \frac{|2-2-10|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$.
- 5.b. [1,5 pt] $2\sqrt{5} < 5$: (Δ) et (C) sont sécants [0,5]. Avec $x = 10 - 2y$: $(8 - 2y)^2 + (y + 1)^2 = 25 \iff 5y^2 - 30y + 40 = 0 \iff (y - 2)(y - 4) = 0$ [0,5]. Points : $(6; 2) = A$ et $(2; 4) = B$ [0,5].
6. [0,75 pt] $\vec{u}(-2; 1)$, directeur de (Δ) , est normal à (D) : $-2(x - 2) + (y + 1) = 0 \iff 2x - y - 5 = 0$.
- 7.a. [0,5 pt] $m^2 + 8m + 20 = (m + 4)^2 + 4 > 0$ pour tout $m \in \mathbb{R}$.
- 7.b. [1 pt] $a^2 + b^2 - 4c = (m - 4)^2 + (2m + 2)^2 + 40m + 80 = 5m^2 + 40m + 100 = 5(m^2 + 8m + 20) > 0$ [0,5] : (C_m) est le cercle de centre $\Omega_m \left(\frac{4-m}{2}; -(m+1) \right)$ et de rayon $R_m = \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{m^2 + 8m + 20}$ [0,5].
- 7.c. [1 pt] Pour $m = 0$, on retrouve l'équation de 4.a : $(C_0) = (C)$ [0,25]. $R_m^2 = \frac{5}{4}((m+4)^2 + 4) \geq 5$, avec égalité si et seulement si $m = -4$ [0,5] : le rayon est minimal pour $m = -4$, cercle de centre $\Omega_{-4}(4; 3)$ et de rayon $\sqrt{5}$ [0,25].
- 7.d. [0,75 pt] $2 \cdot \frac{4-m}{2} - (-(m+1)) - 5 = 0$: $\Omega_m \in (D)$ [0,25]. Réciproquement, un point $(x; 2x - 5)$ de (D) est Ω_m pour $m = 4 - 2x$ (alors $-(m+1) = 2x - 5$) [0,25]. L'ensemble des centres est la droite (D) [0,25].
- 7.e. [0,75 pt] L'équation s'écrit $(x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20) + m(x + 2y - 10) = 0$ [0,25]. A et B sont sur (C) et sur (Δ) (5.b), donc annulent les deux parenthèses pour tout m [0,5].
- 7.f. [0,75 pt] $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 < 5$: intérieur de (C_{-4}) ; son centre $(4; 3)$ est sur (Δ) ($4 + 6 - 10 = 0$), donc $[AB]$ est un diamètre [0,25]. O vérifie $-10 < 0$: on garde le demi-plan ouvert ne contenant pas O [0,25]. Solution : le **demi-disque ouvert** coloré (bords exclus) [0,25].



Bonus

Bonus 1. [+0,5] $-\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} = 2\vec{MG}$ et $\vec{MA} - \vec{MC} = \vec{CA}$. La condition équivaut à $\vec{MG} \cdot \vec{CA} = 0$: c'est la **droite passant par G et perpendiculaire à (AC)** .

Bonus 2. [+0,5] Pour $M(x; y) \in (C)$: $x + 2y = (x - 2) + 2(y + 1) = \vec{u} \cdot \vec{\Omega M}$ avec $\vec{u}(1; 2)$. Cauchy-Schwarz : $x + 2y \leq \|\vec{u}\| \times \Omega M = 5\sqrt{5}$, avec égalité si et seulement si $\vec{\Omega M}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et de même sens : $\vec{\Omega M} = \sqrt{5} \vec{u}$, soit $M(2 + \sqrt{5}; -1 + 2\sqrt{5})$. Le maximum est $5\sqrt{5}$.